高等数学习题册（上）

主　编　杨　新　张泽麟
副主编　陈　勇　陈　凯

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本习题册与同济大学数学系编写的《高等数学（第七版）》教材配套使用，内容包括：函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。每章包含复习题，最后有三套自测题，便于学生考试复习。本习题册的形式为学生作业本，一方面比较规范，便于教师批改，另一方面减轻了学生抄作业题的负担，同时也便于作业本的保留。

本书可作为应用型本科高校、高职高专院校理工科专业大学数学课程配套习题册。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题册：全 2 册 / 杨新，张泽麟主编. —北京：电子工业出版社，2016.8

ISBN 978-7-121-29672-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①杨… ②张… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—习题集 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 189199 号

策划编辑：郭乃明

责任编辑：郭乃明　　特约编辑：范　丽

印　　刷：

装　　订：

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036

开　　本：787×1 092　1/16　印张：25　字数：333 千字

版　　次：2016 年 8 月第 1 版

印　　次：2016 年 8 月第 1 次印刷

定　　价：59.00 元（上、下册）

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254561，guonm@phei.com.cn。

前　　言

本书是同济大学应用数学系编写的《高等数学（第七版）》的配套练习册。为促进学生全面掌握所学知识，方便教师考查学生学习状况，我们将每小节最基本、最重要的知识进行梳理，并给出针对性的习题以强化学生基础能力，最后将前期工作进行整合、汇编，出版了该配套练习册。该习题册进一步对教学理念进行深化、分层，习题类型全面、内容详实。每章带有复习与提高部分，对计算要求较多的章节以巩固基本的理论计算能力为主，对应用要求较多的章节以强化实际分析解决问题的能力为重，有区别地增加各章复习题，提高学生数学能力。

本练习册的特点：(1）强化大纲要求，每节习题侧重对知识点的覆盖，对基础知识、基本技能的考查，对重点知识的强调，旨在夯实基础，为进一步学习奠定理论基石；(2）“提高部分”注重综合能力和创新能力的培养，将研究性学习与数学教学结合起来，为学生营造探究、体验、创造的开放性平台，促使学生更加深入地应用知识，培养创新能力及创造性思维；(3）选题广泛、典型、新颖，注重解题基本技巧训练和理论联系实际能力锻炼；(4）增设期末“自测题”，有助于学生及时自我检测学习效果，以更好地理解所学知识，并对期末考试进行初步复习。

该套练习册的编写融入了教师多年教学经验，相信它能对进一步提高大学数学的教学质量，对同学们掌握好高等数学的基本概念，准确理解抽象概念，提高运用数学构建现实模型并求解的能力以及对日后继续深造均能起到重要的作用。

本练习册上册的主要内容包括极限与连续、导数和微分计算、导数的应用、不定积分基本计算、定积分基本计算和积分学基本应用共 6 个部分，和《高等数学（同济版）》对应章节的教学安排基本一致，只要按阅读顺序使用即可。每章末的复习与提高中给出了一些实际问题，建议由教师指导学生分组讨论，给出详细求解过程并进行 PPT 演讲，培养学生实践能力。

本书由杨新、张泽麟任主编，陈勇、陈凯任副主编，安世勇等人参与编写。在历次教学活动中数理教研室的同事们均对内容提出过许多有价值的意见，在此一并表示致谢。由于水平有限，书中难免有不妥之处，挚诚欢迎批评指正。

编者

2016 年 7 月

目　　录

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

第一章　函数与极限

第 1 次

1.1　映射与函数

重点：掌握函数的定义及基本性质。

1．函数 $y=\dfrac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域为________________________________。

2．设函数 $f(x)$的定义域 $D=[0,1]$，则函数 $f(x^2)+f(x-1)$的定义域为__________

__________________________。

3．函数 $y=\sqrt{x-x^2}$ 的值域为____。

4．下列各项中函数 $f(x)$与 $g(x)$相同的为（　　）。

A．$f(x)=x-1$，$g(x)=\sqrt{(x-1)^2}$

B．$f(x)=1$，$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$

C．$f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$

D．$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$

5．下列函数为偶函数的为（　　）。

A．$f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$　　　　B．$f(x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$

C．$f(x)=x(x-1)(x+1)$　　　　D．$f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

6．求下列函数的反函数。

（1）$f(x)=1+\ln(x+2)$

（2） $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\geq 1) \\ x+1 & (x<1) \end{cases}$

7．把函数 $y=\mathrm{e}^{\ln\cos(\mathrm{e}^{x^2})}$ 分解为基本初等函数的复合形式。

8．设 $f(x-\dfrac{1}{x})=\dfrac{x^2}{1+x^4}$，求 $f(x)$。

9．已知函数 $f(\sqrt{x}-1)=x+2$，（1）求函数 $f(x)$的值域；（2）求函数 $f\circ f$ 的值域。

第 2 次

1.2　数列的极限

1.3　函数的极限

重点：了解极限定义。

难点：根据定义验证极限。

1．下列数列是发散的为（　　）。

A．$x_n = e^{-n}$　　B．$x_n = 2 + \frac{1}{n^2}$

C．$x_n = n - \frac{1}{n}$　　D．$x_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$

2．画出函数图形，并判别下列极限是否存在，如存在则求出极限。

（1）$\lim\limits_{x \to 0} \sin x$　　（2）$\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$

（3）$\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x$　　（4）$\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x$

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{x}$　　　　（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x}$

3．考虑下列函数在分界点处极限的存在性，并画出其图形。

（1）$f(x)=\begin{cases}2x+1 & (x>0)\\ 1 & (x<0)\end{cases}$

（2）$f(x)=\begin{cases}1-x & (x<0)\\ 1 & (x=0)\\ x-1 & (x<0)\end{cases}$

*4．当$x\to 2$时，$y=x^2\to 4$。问δ等于多少，可使当$|x-2|<\delta$时，$|y-4|<0.001$？

思考：（1）数列极限与函数极限的区别与联系是什么？

（2）$\varepsilon-\delta$形式的极限定义中，如何理解ε与δ的关系？

第 3 次

1.4　无穷小与无穷大

重点： 无穷小（无穷大）是变化过程中的一种趋势，不是一个常数。

1．当 $n\to\infty$时，下列数列不是无穷小量的是（　　）。

A．$\dfrac{11^{55}}{2^n}$　　　　B．$\dfrac{[1+(-1)^n]}{\sqrt{n}}$

C．$4^{(-1)^n}$　　　　D．$\dfrac{n+1}{n^2+1}$

2．当 $x\to 0$ 时，下列变量中是无穷小量的有________________，是无穷大量的有__________________，既不是无穷小量又不是无穷大量的有____。

A．$y=x^2-x$　　　　B．$y=\ln(\mathrm{e}^x+1)$

C．$y=\tan 2x$　　　　D．$y=\csc^2 x$

E．$\dfrac{1000}{x^4}$　　　　F．$y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$

3．当 $x\to\infty$时，将下列函数 $y=f(x)$表示成一个常数与无穷小之和。

（1）$y=\dfrac{2x^3+5}{x^3-1}$

（2）$\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}+3}{3\mathrm{e}^{2x}-1}$

*4. 函数 $y=x\cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是否有界？这个函数是否在 $x\to+\infty$时为无穷大？为什么？

5. 求函数 $f(x)=\dfrac{4}{2-x^2}$ 的图形的渐近线。

思考：试求下列函数的极限。

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

（2） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$

（3） $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{1}{x}$

（4） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$

第 4 次

1.5 极限运算法则

重点：掌握极限四则运算的法则、极限的传递性。

1．计算下列极限。

（1）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-5x-1}{x^2+1}$

（2）$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x^2+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x^2+x}{3x^2+x}$

（5）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x-4}{x^2-4x+3}$

（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{2x^2+1}$

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

（8）$\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1})$

（9） $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

（10） $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})$

2．已知$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，求常数 a 与 b。

3．已知$\lim\limits_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=1$，求常数 a 与 b。

思考：总结第 1 题中 10 个题目求极限的各种方法。

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第 5 次

1.6 极限存在准则　两个重要极限

重点：两个基本极限，两种极限存在的判定准则。

难点：两个基本极限的使用原则，掌握将极限式化为两种基本极限的方法。

（1）$\lim\limits_{[x]\to 0}\dfrac{\sin[x]}{[x]}$：角度和分母的形式完全一样，且趋向 0。

（2）$\lim\limits_{[x\to\infty]}(1+\dfrac{1}{[x]})^{[x]}$："1+" 形式及符号，指数和加数的倒数关系，指数趋于无穷。

1．计算下列极限。

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}$

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$

（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x}\sin\dfrac{1}{x}$

（7） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$ （8） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$

2. 计算下列函数极限。

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{x}$ （2） $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x}{1+x})^{x}$

（3） $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$ （4） $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$

*3．利用极限存在准则证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots 5^n}=5$。

思考：两个重要极限的各种变形公式：

（1）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$。

（2）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}(1+g(x))^{\frac{1}{g(x)}}=\mathrm{e}$。

（3）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$， $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}(1+g(x))^{f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)}$。

专业班级______________ 姓名______________ 学号______________

第 6 次

1.7 无穷小的比较

重点：一些常用的等价无穷小，无穷小在计算极限时的使用原则。

1. 当 $x \to 0$ 时，写出下列函数的等价无穷小（只要求写出 x 的幂形式的等价无穷小）。

$\sin x \sim$ ______________ $\tan x \sim$ ______________

$\arcsin x \sim$ ______________ $\arctan x \sim$ ______________

$1-\cos x \sim$ ______________ $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim$ ______________

$e^x-1 \sim$ ______________ $\sec x-1 \sim$ ______________

$\ln(1+x) \sim$ ______________ $\tan x-\sin x \sim$ ______________

2. 当 $x \to 0$ 时，写出下列函数的等价无穷小，并将其按低阶到高阶的次序排列起来。

（1） $\arcsin\sqrt{x} \sim$ ______________

（2） $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1 \sim$ ______________

（3） $\cos(x^2)-1 \sim$ ______________

（4） $\tan(x^3) \sim$ ______________

以上函数按低阶到高阶的排列次序为 ______________________________
______________。

3．利用无穷小的性质求下列极限。

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin 3x}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{e^{3x}-1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}-1)}$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(1-\cos x)}{x}$

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x})$

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\tan^3 x}$

思考：（1）总结以下常用等价无穷小的变形：

当 $\varphi(x)\to 0$ 时，有 $\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$，$\tan\varphi(x)\sim\varphi(x)$，$\ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x)$，$e^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)$，$1-\cos\varphi(x)\sim\dfrac{1}{2}\varphi^2(x)$，$[1+\varphi(x)]^\alpha-1\sim\alpha\varphi(x)$

（2）进行等价无穷小的代换时，必须将分子和分母的整体分别换成它们各自的等价无穷小。如果分子（或分母）为若干个因子的乘积，那么可对其中的一个或若干个无穷小的因子进行代换，这时可保证所得的新的分子（或分母）的整体与原来的分子（或分母）的整体是等价无穷小。

第 7 次

1.8 函数的连续性与间断点

重点：四种间断点的几何特征。

1．设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，判断下列四个条件是否为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续的等价条件。（是打√，否打×）

（1）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，其中 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ （　　）

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ （　　）

（3）$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ （　　）

（4）$\lim\limits_{x\to x_{0^+}}f(x)=\lim\limits_{x\to x_{0^-}}f(x)=f(x_0)$ （　　）

2．把下列各项填入下表括号内（可重填）。

A．一　　B．二

C．有　　D．无

E．存在　　F．不存在

G．相等　　H．不相等

I．等于　　J．不等于

<table>
<tr><td rowspan="2">第（　）类间断点</td><td>可去间断点</td><td>（1）$f(x_0)$（　　）定义，而 $\lim\limits_{x\to x_{0^-}}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_{0^+}}f(x)$ 都（　　）且（　　）；
（2）$f(x_0)$（　　）定义，而 $\lim\limits_{x\to x_{0^-}}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_{0^+}}f(x)$ 都（　　）且（　　），但（　　）$f(x_0)$</td></tr>
<tr><td>跳跃间断点</td><td>$\lim\limits_{x\to x_{0^-}}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_{0^+}}f(x)$ 都（　　）但（　　）</td></tr>
<tr><td>第（　）类间断点</td><td>无穷间断点
振荡间断点</td><td>$\lim\limits_{x\to x_{0^-}}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_{0^+}}f(x)$ 至少有一个（　　）</td></tr>
</table>

3．设函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ K & (x=0) \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，求 K 值。

4．设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x} & (x<0) \\ 2 & (x=0) \\ 2a+b & (x>0) \end{cases}$ 求 a 和 b 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续。

5．判断下列函数的间断点的类型。

（1） $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

（2） $y=\begin{cases} x+2 & (x\leq 0) \\ x^2 & (x>0) \end{cases}$

思考：函数的连续性定义是否提供了求极限的一个方法？

专业班级____________ 姓名____________ 学号____________

第 8 次

1.9 连续函数的运算与初等函数的连续

1.10 闭区间上连续函数的性质

1．求下列极限。

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{5x^2-3x+4}$

（2）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\sin 3x-1)$

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{x}{x^2+1}}$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+7}{x+1})^{x+1}$

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$

*（7）$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}(a>0,b>0,c>0)$ *（8）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

2．若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x-a}(\cos x-b)=5$，求 a 和 b 的值。

3．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)<a$， $f(b)>b$，证明方程 $f(x)=x$ 在 (a,b) 内至少有一个实根。

思考：求幂指函数 $u(x)^{v(x)}[u(x)>0,u(x)\neq 1]$ 的极限方法：

$$\lim u(x)^{v(x)}=\lim \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}=\mathrm{e}^{\lim v(x)\ln u(x)}$$

如果 $\lim u(x)=a>0$， $\lim v(x)=b$，那么 $\lim u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{b\ln a}=a^b=[\lim u(x)]^{\lim v(x)}$。

第一章 复习与提高

1．计算以下极限。

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$

2．选择适当的 a、b 使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$。

3．用 $[x]$ 代表不超过 x 的最大整数计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{[x]}$ 。

4．对极限定义的理解：从几何角度说明以下事实——为了证明$\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$，可选择的最大的$\delta=\sqrt{9+\varepsilon}-3$。

5．用定义证明$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}(a>0)$。

6．如果$f(x)=x^3-x^2+x$，一定存在着c，使得$f(c)=10$。

专业班级__________________　　　　　　姓名__________________　　　　　　学号__________________

第二章　导数与微分

第 9 次

2.1　导数概念

重点：掌握导数的数量意义和几何意义。

难点：根据定义去求导数。

1．导数反映了函数相对于自变量变化的快慢程度，即变化率问题。如在自然科学和工程技术领域内的电流强度、角速度、线速度等。设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 可定义为：（用极限写出三种不同形式的定义方式）

（1）____；

（2）____；

（3）____。

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件为：

____；

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上的意义为：

____；

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的________条件。

*2．设函数 $f(x)=x^2$，按导数定义求 $f'(1)$。

3．求曲线 $y=3x^2+5$ 在点 $(1,8)$ 处的切线方程。

4．根据定义讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

5．设函数 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x & (x>0) \\ ax+b & (x\leq 0) \end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，问 a、b 应取什么值？

思考：

（1）我们是如何用极限定义导数概念的？

（2）在日常生活中，我们还会在什么地方讨论各种具有不同意义的变量的变化“快慢”问题？（数学上称之为函数的变化率问题，用导数概念描述）

注：可查阅相关的数学历史文献资料辅助学习。

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第 10 次

2.2 函数的求导法则（一）

重点：基本导数的公式，四则运算的求导公式。

1．求下列函数的导数。

（提示：在完成下列习题前，请深刻理解并牢记常用求导公式和求导法则）

（1） $y = 2x^4 - 3x^2 + 2$

（2） $y = \sqrt[2]{x^3} - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

（3） $y = 2\tan x + \sec x - \mathrm{e}^2$

（4） $y = x^2 \sin x$

（5） $y = \dfrac{\ln x}{x}$

（6） $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + x}$

（7） $y=x^2-2^x$

（8） $y=\dfrac{1+x}{2+x^2}$

（9） $y=x\cdot\ln x\cdot \mathrm{e}^x$

（10） $y=x\arcsin x$

2．设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$，则 $f'(0)=$______________

A． 0　　B． -2　　C． 4　　D． -6

3．已知函数 $y=\cos x-\cot x$，求 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}$ 和 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{2}}$。

4．确定 a 的值，使 $y=ax$ 为曲线 $y=\ln x$ 的切线。

专业班级________________ 姓名________________ 学号________________

第 11 次

2.2 函数的求导法则（二）

重点：复合函数的求导关键在于搞清复合关系，从外层到内层一步一步进行求导运算，不要遗漏，尤其当既有四则运算又有复合函数运算时，要根据题目中给出的函数表达式决定先用四则运算求导法则还是先用复合函数求导法则。

1．求下列函数的导数。

（1） $y=(3x+4)^2$

（2） $y=\sin(2-3x)$

（3） $y=\arctan(x^3)$

（4） $y=\mathrm{e}^{\cos x}$

（5） $y=\ln(2+3x^2)$

（6） $y=\sqrt{1-x^2}$

（7） $y=(\arccos x)^2$

（8） $y=\ln(\mathrm{e}^x+1)$

（9） $y=\ln\ln\ln x$

（10） $y=\sqrt{1+\ln x^2}$

（11） $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（12） $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$

（13） $y=\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$

（14） $y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$

（15） $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$

*（16） $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

2．设函数 $y=[f(\ln x)]^3$ 可导，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

专业班级________________ 姓名________________ 学号________________

第 12 次

2.3 高阶导数

1．常用高阶导数基本公式有：

（1）$(\mathrm{e}^x)^{(n)} =$ ________________

（2）$(\sin x)^{(n)} =$ ________________

（3）$(\cos x)^{(n)} =$ ________________

（4）$[\ln(1+x)]^{(n)} =$ ________________

（5）$(x^{\mu})^{(n)} =$ ________________

（6）$(u \cdot v)^{(n)} =$ ________________

2．求下列函数的二阶导数。

（1）$y = 3x^2 - \ln x$

（2）$y = x\cos x$

（3）$y = \mathrm{e}^{2x^2-1}$

（4）$y = \cot x$

（5）$y = (1+x^2)\arctan x$

（6）$y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

3．设 $f''(x)$ 存在，求 $y=f(x^2)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

*4．求下列函数所指定的阶的导数。

（1） $y=\mathrm{e}^x\cos x$，求 $y^{(4)}$。

*（2） $y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ （$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是常数），求 $y^{(n)}$。

*（3） $y=x\mathrm{e}^x$，求 $y^{(n)}$。

思考：使用莱布尼茨公式的关键是选择适当的 $u(x)$ 和 $v(x)$，选取原则首先是要求 $u(x)$ 和 $v(x)$ 有 n 阶导数，而且要求它们的 n 阶导数易求，进一步的要求是它们的 n 阶导数形式简单。

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第 13 次

2.4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率

重点：隐函数求导，关键在于将函数所对应的变量看成是复合函数，利用链式法则；参数方程求导，不要忘记除以自变量所对应的导数！

1．求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

（提示 :把 y 看成 x 的函数, 用复合函数求导法对方程两边关于 x 求导, 然后解出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ）

（1） $y^2+2xy-3=0$　　（2） $x=\tan(xy)$

（3） $x+x\mathrm{e}^y=y$　　（4） $2^x+2^y=2^{xy}$

2．求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

（1） $x^2-y^2=1$　　（2） $y=x+\arctan y$

3．求由下列参数方程所确定的函数的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。（提示：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$）

（1）$\begin{cases} x=\mathrm{e}^{t} \\ y=\mathrm{e}^{-2t} \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x=\mathrm{e}^{t}\sin t \\ y=\mathrm{e}^{t}\cos t \end{cases}$

4.求由下列参数方程所确定的隐函数的二阶导数$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$。

（1）$\begin{cases} x=\frac{t^2}{2} \\ y=1-t \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$

5．用对数求导法求下列函数的导数。

（提示：先对式子两边取自然对数，然后再对 x 求导，这样的对数求导法适用于幂指数函数、乘积、乘方、开方等形式）

（1）$y=x^{x}$　　（2）$y=(1+\frac{1}{x})^{x}$

6．求由参数方程$\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$所确定的函数的三阶导数$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$

第 14 次

2.5 函数的微分

理解：函数的微分刻画了当自变量有微小变化时，函数变化的近似值。它的几何意义是当横坐标增加 Δx 时曲线 $y=f(x)$ 在 x 处切线纵坐标的增量。对曲线的研究可近似转化为对切线的研究，在局部范围内用线性函数近似代替非线性函数，用切线段近似代替曲线段。这是微分学的基本思想方法之一：非线性函数的局部线性化。

1．求下列函数在 $x=1$ 处的 Δy 与 $\mathrm{d}y$。

（1） $f(x)=x^2-x$

（2） $f(x)=x^3-1$

2．求下列函数的微分。

（1） $y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}+\ln x$

（2） $y=x^2\sin x$

（3） $y=x\ln x-x$

（4） $y=\mathrm{e}^{-x}\cos(3+x)$

3．求下列方程所确定的隐函数的微分。

（1） $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$

（2） $xy=\mathrm{e}^{x+y}$

4．将适当的函数填入下列括号内使等式成立。

（1） $\mathrm{d}(\qquad)=3x^2\mathrm{d}x$

（2） $\mathrm{d}(\qquad)=\sin x\mathrm{d}x$

（3） $\mathrm{d}(\qquad)=\cos\omega x\mathrm{d}x$

（4） $\mathrm{d}(\qquad)=-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

（5） $\mathrm{d}(\qquad)=\dfrac{1}{2x+1}\mathrm{d}x$

（6） $\mathrm{d}(\qquad)=\sec^2 2x\mathrm{d}x$

（7） $\mathrm{d}(\qquad)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

（8） $\mathrm{d}(\qquad)=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$

5．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

证明（1）函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微；（2） $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不可微。

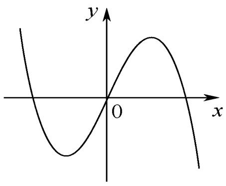
6．有一个半径为 10cm 的金属圆形薄片，经加热后，半径增加了 0.1cm，求金属圆片面积的近似增量。

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

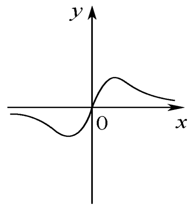
第二章　复习与提高

1．（a）～（d）为函数图像，I～IV 为导数图像，请将它们匹配起来。解释你得出匹配的理由。

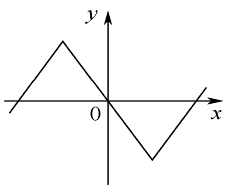
（a）



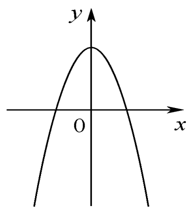
Ⅰ



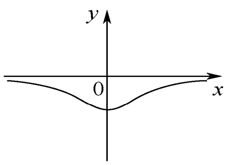
（b）



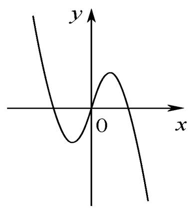
Ⅱ



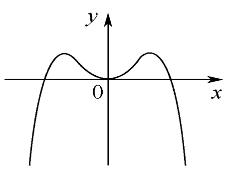
（c）



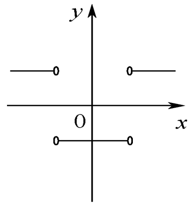
Ⅲ



（d）



Ⅳ



2．设函数 f 满足方程：$f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2$，其中 x，y 是任意实数。已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，请计算 $f(0)$；$f'(0)$；$f'(x)$。

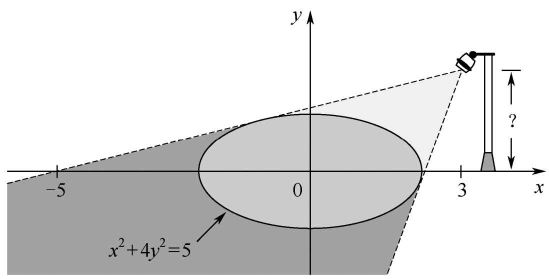
3．在某个渔场里，一个池塘中鱼的数量变化被认为是有规律的。鱼群数量变化率可由以下方程描述：$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=r_0[1-\frac{P(t)}{P_\mathrm{c}}]P(t)-\beta P(t)$，其中 r_0 代表出生率，P_c 是池塘可容纳鱼群数量的最大值，β 代表捕捉率。

（a）$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ 取什么值时，鱼群数量是稳定的？

（b）如果池塘可容纳鱼群数量为 10000 条，出生率取 5%，捕捉率取 4%，请计算鱼群数量的稳定值。

（c）如果 β 增加到 5%将会发生什么?

4．路灯位于 y 轴右侧，距原点 3 个单位，下图展示了一个椭圆形区域 $x^2+4y^2\leq 5$ 的阴影效果。如果（-5, 0）恰好在阴影的边界处，请计算路灯的高度。



第三章 微分中值定理与导数的应用

第 15 次

3.1 微分中值定理

理解：微分中值定理是应用导数研究函数以及曲线性质的重要工具。导数只反映函数在一点附近的局部特性，要应用它来研究函数在某区间上的整体性质，则要借助于微分中值定理，因此微分中值定理是沟通函数及其导数的桥梁。

1．设函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，则方程 $f'(x)=0$ 有__________个实根。

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2．验证拉格朗日中值定理对函数 $y=x^2+3x-4$ 在区间[0,1]上的正确性。

3．证明恒等式 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}(-1\leq x\leq 1)$。

4．证明不等式$|\sin b-\sin a|\leq|b-a|$。

5．设$a>b>0$，证明：$\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$

（提示：证明区间上的不等式，特别是含有两个不等号的，可考虑利用拉格朗日中值定理，然后应用条件$a<\xi<b$将等式转化成不等式）

专业班级＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

第 16 次

3.2 洛必达法则

理解：应用洛必达法则可对未定式$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$求极限。不是未定式$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$的，用分式性质或对数恒等式等变形可使其成为$\frac{0}{0}$形或$\frac{\infty}{\infty}$形，然后检查洛必达法则成立的条件，看是否适用。若使用洛必达法则一次后还是$\frac{0}{0}$形或$\frac{\infty}{\infty}$形，可考虑再次使用洛必达法则。同时，洛必达法则可与其他求极限方法（如等价无穷小替代或重要极限方法）结合使用，先化简再使用洛必达，使运算更加简单。

1．用洛必达法则求下列极限。

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\tan 2x}$

（4）$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-x\cos x}$

（6）$\lim\limits_{x\to 0^+}x^n\ln 2x(n>0)$

（7）$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$　　　*（8）$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$

2．设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=1$，试求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}$。

*3．讨论函数 $f(x)=\begin{cases}[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}} & (x>0)\\ e^{-\frac{1}{2}} & (x\le 0)\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性。

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

第 17 次

3.3　泰勒公式

1．常用函数的麦克劳林公式：

（1）$e^x =$ ____；

（2）$\sin x =$ ____；

（3）$\cos x =$ ____；

（4）$\ln(1+x)=$ ____；

（5）$(1+x)^\alpha =$ ____。

2．按 $(x+1)$ 的幂展开多项式 $f(x)=1+3x+5x^2-2x^3$。

3．求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日余项的3阶泰勒公式。

4．求函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式。

*5．利用泰勒公式求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$

思考：由于用多项式表示的函数，只要对自变量进行有限次（加、减、乘）算术运算，便能求出它的函数值来，因此我们常用多项式来近似表达函数。微分和泰勒公式都是利用多项式来近似表达函数的工具。微分是用一次多项式近似表达函数，而泰勒公式是用 n 次多项式近似表达函数，请认真分析比较两种近似表达函数方式的异同与优劣。

第 18 次

3.4　函数的单调性与曲线的凹凸性

记住：单调区间的求解步骤：（1）先求出原函数 $y = f(x)$ 定义域；（2）求函数的导数 $y' = f'(x)$，再求函数的驻点($y' = 0$ 的解)和不可导点；（3）根据驻点和不可导点把定义域划分为几个区间，再用定理一判定单调性。

1．确定下列函数的单调区间。

（1）$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

（2）$f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

记住：求拐点和凹凸区间的求解步骤：（1）先求出二阶导数 $f''(x)$；（2）解出 $f''(x)=0$ 在定义域 I 上的实根以及 I 内 $f''(x)$ 不存在的点；（3）对上面求出的每个点 x_0，若 $f''(x)$ 在 x_0 两侧符号相反，则 $[x_0, f(x_0)]$ 是拐点。

2．求下列函数图形的拐点及凹凸区间。

（1）$y = x + x^{\frac{5}{3}}$

（2） $y=\ln(1+x^2)$

3．证明下列不等式。（提示：利用函数单调性或凹凸性的判别法证明不等式）

（1）当 $x>0$ 时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$

（2）当 $x>1$ 时，$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$

（3） $\frac{1}{2}(e^x+e^y)>e^{\frac{x+y}{2}}\ (x\neq y)$

专业班级________________　　姓名________________　　学号________________

第 19 次

3.5　函数的极值与最大值、最小值

理解：极值是一个局部的概念，其定义中的邻域究竟有多大无关紧要；最大(小)值是一个整体概念，是相对于整个区间而言的。

记住：函数 $f(x)$ 的极值求解步骤：（1）求出 $f'(x)$；（2）求 $f(x)$ 的所有驻点和不可导点；（3）确定 $f'(x)$ 在每个驻点和不可导点两侧是否异号，以确定该点是否为极值点（也可以用第二充分条件判断）；（4）求出各极值点的函数值。

1．求下列函数的极值。

（1）$y=2x^3+3x^2-12x$　　　　（2）$y=x-\ln(1+x)$

2．求下列函数的最大值、最小值。

（1）$y=3x^4-8x^3+6x^2$（$0\leq x\leq 2$）

（2）$y=x^2\ln x$（$1\leq x\leq \mathrm{e}$）

3．函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}(x\geq 0)$ 在何处取得最大值？

记住：最值应用题的求解步骤：（1）根据问题适当设自变量，建立目标函数 $f(x)$，并确定定义域；（2）求 $f(x)$ 的最值：求驻点，用充分条件判定极值，根据实际问题确定最值。

4．欲用围墙围成面积为 216m^2 的一块矩形土地，并在正中用一堵墙将其隔成两块，问这块土地的长和宽选取多大的尺寸，才能使所用建筑材料最省？

5．设有一长 8cm、宽 5cm 的矩形铁片，若在每个角上剪去同样大小的正方形铁片，问剪去正方形的边长多大，才能使剩下的铁片折起来做成开口盒子的容积为最大？

6．把一根长为 a 的铅丝切成两段，一段围成圆形，另一段围成正方形，问这两段铅丝各为多长时，围成的圆形面积和正方形面积之和最小？

第 20 次

3.6　函数图形的描绘

记住：三种渐近线定义：

（1）若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$，或 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$，则 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线；

（2）若 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$，或 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$，则 $y = A$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线；

（3）若 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$ 或 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ 且 $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = b$，则 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线。

1．求下列曲线的水平渐近线和铅直渐近线。

（1）$y = \dfrac{1}{x^3 + x}$

（2）$y = \dfrac{x}{1 - x^2}$

（3） $y=\dfrac{\sin x}{x}$

2．画出下列函数的图形。

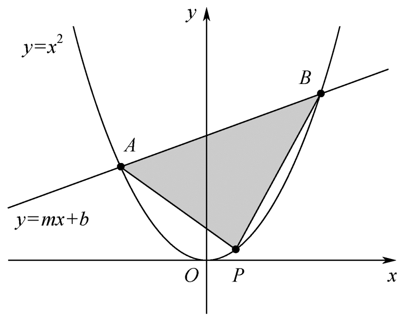
（1） $y=\dfrac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$

（2） $y=\dfrac{x}{1+x^2}$

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

第三章　复习与提高

1．直线 $y=mx+b$ 与抛物线 $y=x^2$ 相交于 A 和 B。在弧段上找一个点，使得阴影部分三角形面积为最大。



2．正数 a 取什么值时，曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=x$ 相交或相切?

3．两名短跑运动员进行 100 米赛跑，他们同时出发并且恰好同时到达终点。请证明：他们在某一时刻一定具有相同的速度。

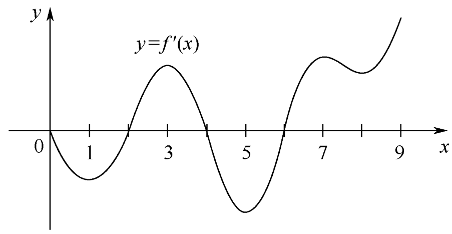
4．下图展示 f 的一阶导数 f' 的变化情况，请回答以下问题并说明理由：

（a）f 的增区间在哪里?

（b）请给出 f 的极值点。

（c）请给出 f 的凸区间及凹区间。

（d）f 的拐点坐标是多少?



5．投资者以年利率 i 投入资金 A_0 到某项目上，并约定每年复利计算 n 次，记本利和 $A = A_0(1+\frac{i}{n})^{nt}$。现在令 $n \to \infty$，则称其为连续复利。请用洛必达法则证明：如果采用复利模型，则 t 年后的本利和 $A = A_0 e^{it}$。

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第四章 不定积分

第 21 次

4.1 不定积分的概念与性质

1. 填空题

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\int f(x)\mathrm{d}x]=$________________________;

(2) $\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x]=$________________________;

(3) $\int F'(x)\mathrm{d}x=$________________________;

(4) $\int \mathrm{d}F(x)=$________________________。

由此可见，微分运算（以记号 d 表示）与求不定积分的运算（简称积分运算，以记号$\int$表示）是________________的。

2. 求下列不定积分。（提示：要求答题前熟记 13 个基本积分公式。积分结果是否正确，只须对结果求导验证，即看它的导数是否等于被积函数，若相等则结果正确，否则结果错误）

(1) $\int \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(2) $\int (x^3+2x+1)\mathrm{d}x$

(3) $\int \dfrac{(\sqrt{x}+1)(x-1)}{x}\mathrm{d}x$

(4) $\int (3\mathrm{e}^x+\dfrac{2}{x})\mathrm{d}x$

(5) $\int(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}})\mathrm{d}x$

(6) $\int \mathrm{e}^x(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}})\mathrm{d}x$

(7) $\int 2^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

(8) $\int(2\cdot 3^x-3\cdot 2^x)\mathrm{d}x$

(9) $\int \sec x(\tan x-\sec x)\mathrm{d}x$

(10) $\int \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

(11) $\int\frac{1}{1+\cos 2x}$

(12) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$

（13）$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \mathrm{d}x$

（14）$\int \cot^2 x \mathrm{d}x$

（15）$\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x$

（16）$\int \frac{3x^4+2x^2}{x^2+1} \mathrm{d}x$

3．一曲线通过点$(1,0)$且在任意一点处的切线斜率等于该点横坐标倒数的3倍，求该曲线方程。（提示：由题意列出函数导数的方程，再由不定积分解之，这实际上就是今后我们要学习的微分方程问题）

专业班级________________ 姓名________________ 学号________________

第 22 次

4.2 换元积分法（一）

理解：把复合函数的微分法反过来用于求不定积分，利用中间变量的代换，得到复合函数的积分法称为换元积分法，简称换元法。

1. 在下列各式等号右端的空白处填入适当的系数，使等式成立，如 $\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}(3x+3)$。

（提示：应熟练掌握上述从左到右的变形形式，俗称凑微分）

（1）$\mathrm{d}x=$ ______ $\mathrm{d}(2x)$　　（2）$\mathrm{d}x=$ ______ $\mathrm{d}(4x-2)$

（3）$x\mathrm{d}x=$ ______ $\mathrm{d}(3x^2)$　　（4）$x^2\mathrm{d}x=$ ______ $\mathrm{d}(x^3-3)$

（5）$\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=$ ______ $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{3x})$　　（6）$\sin 3x\mathrm{d}x=$ ______ $\mathrm{d}(\cos 3x)$

（7）$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=$ ______ $\mathrm{d}(2-3\ln|x|)$

（8）$\frac{1}{1+4x^2}\mathrm{d}x=$ ______ $\mathrm{d}(\arctan 2x)$

（9）$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=$ ______ $\mathrm{d}(2-\arcsin x)$

（10）$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=$ ______ $\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$

2．求下列不定积分。

（1）$\int \mathrm{e}^{3t}\mathrm{d}t$　　（2）$\int (2-3x)^4\mathrm{d}x$

（3）$\int \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x$　　（4）$\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}\mathrm{d}x$

(5) $\int x\mathrm{e}^{-x^2+2}\mathrm{d}x$

(6) $\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

(8) $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}\mathrm{d}x$

(9) $\int \frac{x+2}{x^2+4x-4}\mathrm{d}x$

(10) $\int \frac{1}{x(2+\ln x)}\mathrm{d}x$

(11) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$

(12) $\int \cos^3 x\mathrm{d}x$

(13) $\int sex^2 x\tan^3 x\mathrm{d}x$

(14) $\int \frac{1}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

第 23 次

4.2 换元积分法（二）

1．求下列不定积分。

（1）$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$

（2）$\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x$

（3）$\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$

（4）$\int \tan\sqrt{1+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

2．求下列不定积分。

（1）$\int \frac{1-x}{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}x$

（2）$\int \frac{x^3}{9+x^2}\mathrm{d}x$

（3）$\int \frac{1}{4x^2-1}\mathrm{d}x$

（4）$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\mathrm{d}x$

（5）$\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$

（6）$\int \frac{1}{1+\sqrt{3x}}\mathrm{d}x$

（7）$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

（8）$\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\mathrm{d}x$

（9）$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

（10）$\int \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第 24 次

4.3 分部积分法

理解：设 $u(x),v(x)$ 具有连续导数，则有 $\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int vu'\mathrm{d}x$ 或 $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$ 。

分部积分法的关键是 u 和 $\mathrm{d}v$ 的选取，其一般原则是：

（1）$\int v\mathrm{d}u$ 要比 $\int u\mathrm{d}v$ 容易积出。

（2）v 要容易求得。

1．求下列不定积分。

（1）$\int x\sin 2x\mathrm{d}x$

（2）$\int x^2 \ln x\mathrm{d}x$

（3）$\int \arctan x\mathrm{d}x$

（4）$\int x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$

（5）$\int \mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$

（6）$\int x\tan^2 x\mathrm{d}x$

（7）$\int (\ln x)^2 \mathrm{d}x$

（8）$\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$

（9）$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

（10）$\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$

（11）$\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$

（12）$\int \cos\sqrt{x}\mathrm{d}x$

2．设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\sin x}{x}$，求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$。

第 25 次

4.4　有理函数的积分

4.5　积分表的使用

记住：对于有理真分式函数的积分$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$，可按以下步骤求得：（1）将$Q(x)$因式分解成一次质因式与二次质因式；（2）用待定系数法将$\frac{P(x)}{Q(x)}$分解成部分分式之和；（3）对每个简单部分分式逐项积分。以上方法在理论上已证明是可行的，但它不一定是最简便的方法，应灵活运用其他方法。

1．求下列不定积分。

（1）$\int\frac{x^4}{x+1}\mathrm{d}x$　　　　（2）$\int\frac{x+2}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$

（3）$\int\frac{1}{x^2(1-x)}\mathrm{d}x$　　　　（4）$\int\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$

（5） $\int \frac{1}{5+\cos x}\mathrm{d}x$

（6） $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\mathrm{d}x$

2．利用积分表计算下列不定积分。

（1） $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-9}}$

（2） $\int \sqrt{3x^2-2}\mathrm{d}x$

（3） $\int \mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x$

（4） $\int \cos^6 x\mathrm{d}x$

第四章 复习与提高

计算以下不定积分。

（1）$\int x^2(x^3+5)^9\mathrm{d}x$

（2）$\int \frac{1+4x}{1+x+2x^2}\mathrm{d}x$

（3）$\int \frac{3}{(2y+1)^5}\mathrm{d}y$

（4）$\int y^2\sqrt{2y^4-1}\mathrm{d}y$

（5）$\int \sec 2\theta \tan 2\theta \mathrm{d}\theta$

（6）$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

（7）$\int x^2(x^3+5)^9\mathrm{d}x$

（8）$\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

（9）$\int \sqrt{x}\sin(1+x^{3/2})\mathrm{d}x$

（10）$\int x^a\sqrt{b+cx^{a+1}}\mathrm{d}x$

（11）$\int \sin x \sec^2(\cos x)\mathrm{d}x$

（12）$\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}\mathrm{d}x$

（13）$\int x\cos 5x\mathrm{d}x$

（14）$\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

（15）$\int x^2\cos mx\mathrm{d}x$

（16）$\int p^5(\cos xp)\mathrm{d}p$

（17）$\int (\ln x)^2\mathrm{d}x$

（18）$\int \mathrm{e}^x\cos 3x\mathrm{d}x$

一些最常用的基本函数的积分，要求大家能灵活使用：

$\int x^n\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1)$

$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$

$\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$

$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

$\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$

$\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$

$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$

$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$

$\int \sin hx\mathrm{d}x=\cos hx+C$

$\int \cos hx\mathrm{d}x=\sin hx+C$

$\int \tan x\mathrm{d}x=\ln|\sec x|+C$

$\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$

$\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a})+C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\sin^{-1}(\frac{x}{a})+C$

第五章 定积分

第 26 次

5.1 定积分的概念与性质

理解：(1) 定积分与不定积分的区别：前者是一个具体的数值，它与上、下限有关，后者是原函数的全体。(2) 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示：由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形中，在 x 轴上方各图形面积之和，减去在 x 轴下方各图形面积之和。(3) 定积分的值仅与被积函数 f 及区间 $[a,b]$ 有关，而与对区间 $[a,b]$ 的分法及对点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 的取法无关，也与积分变量 x 的记法无关，即：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

1．利用定积分的几何意义，求下列积分。(提示：画出图形)

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=$______________　　(2) $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=$______________

2．设有一质量非均的细棒，长度为 l，取棒的一端为原点，假设细棒上任意一点处的线密度为 $\rho(x)$，则细棒的质量 $M=$________________________________。

3．设$a<b$，问a、b取什么值时，积分$\int_a^b (x-x^2)\mathrm{d}x$取得最大值？

4.估计下列各积分的值。

（1）$\int_0^2 (x^2-2x+1)\mathrm{d}x$ （2）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$

5．根据定积分的性质，说明下列各对积分哪一个的值较大。

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\mathrm{d}x$与$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\mathrm{d}x$ （2）$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$与$\int_0^1 (1+x^2)\mathrm{d}x$

6．求函数$y=x+\sin x$在$[0,2\pi]$上的平均值。

专业班级____________　　姓名____________　　学号____________

第 27 次

5.2　微积分基本公式

理解：对积分上限函数求导应注意以下两点：

（1）首先要弄清楚是对哪个变量求导，把积分上限函数的自变量与积分变量区分开来。积分上限函数的自变量是上限变量，因此对积分上限函数求导，就是对上限变量求导，与积分变量没有关系。但有时会遇到上限变量也含在被积表达式内的情况，这时应先设法把上限变量从被积表达式内分离出来，并提到积分号外，然后再进行求导。

（2）当积分上限，甚至积分下限，都是 x 的函数时，就要应用复合函数的求导法则进行求导。如对 $\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$ 的求导，可令 $u=\varphi(x)$，则利用复合函数求导法则求导有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\int_a^{u} f(t)\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

1．求由 $\int_0^y \mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^x \cos t\mathrm{d}t=0$ 所决定的隐函数对 x 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

2．求下列各导数。

（1）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$　　（2）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t^2}^{t^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$

3．设函数 $y=\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$，$f(t)$ 为连续函数，求 $y''(x)$。

4．计算下列各定积分。

（1）$\int_0^1 (2x^2 + x + 1)\mathrm{d}x$

（2）$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

（3）$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$

（4）$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x \leq 1) \\ \frac{1}{2}x^2 & (x>1) \end{cases}$

5．求下列极限。（提示：所求极限如为 $\frac{0}{0}$ 形未定式，可考虑用洛必达法则）

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 \mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2}}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2} \mathrm{d}t}$

6．当 a 为何值时，抛物线 $y=x^2$ 与三直线 $x=a$、$x=a+1$、$y=0$ 所围成的图形面积最小？

第 28 次

5.3 定积分的换元法和分部积分法（一）

理解：应用换元公式应注意：用 $x=\varphi(t)$ 把原来的变量 x 代换成新变量 t 时，积分限也要换成相应于新变量 t 的积分限。

1．利用奇偶函数的定积分的性质直接写出结果。

（1）$\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x \mathrm{d}x =$ ____________________；

（2）$\int_{-4}^{4} \dfrac{x^3 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x=$ ____________________；

（3）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\dfrac{1-x}{1+x} \arcsin\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=$ ____________。

2．计算下列定积分。

（1）$\int_{-2}^{1} \dfrac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3}$

（2）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^3 t\mathrm{d}t$

（3）$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\mathrm{d}u$

（4）$\int_{0}^{1} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$

（5）$\int_{1}^{4} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$

（6）$\int_{\frac{3}{4}}^{1} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}$

（7）$\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x$　　（8）$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$

3．设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x & (x\geq 0)\\ 1+x^2 & (x<0)\end{cases}$，求 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(1-x)\mathrm{d}x$。

4．设 $f(x)$ 是连续函数，证明：$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b}f(a+b-x)\mathrm{d}x$。

5．设 $f(x)$ 是以 α 为周期的周期函数，证明：$\int_{\alpha}^{\alpha+t}f(x)\mathrm{d}x$ 的值与 α 无关。（提示：$x=\alpha+t$）

第 29 次

5.3 定积分的换元法和分部积分法（二）

理解：分部积分法是定积分计算的一个重要方法，特别适用于当被积函数可看成两个函数的乘积的情况，其应用关键是恰当地选取u和v，其寻找u和v的思路同不定积分一样。此外，分部积分法常常与换元法一起使用。

记住：

（1）对称区间上积分：如果函数$f(x)$在区间$[-\alpha,\alpha]$上连续，则

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\alpha}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & （当f(x)为奇函数） \\ 2\int_{0}^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x & （当f(x)为偶函数）\end{cases}$$

（2）周期函数积分：设$f(x)$是以T为周期的连续函数，则$\int_{\alpha}^{\alpha+nT} f(x)\mathrm{d}x=n\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x$；

（3）积分变换：若果函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，则$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$，

$\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$，$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$。

1．计算下列定积分。

（1）$\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$

（2）$\int_{1}^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x$

(3) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$　　　　(4) $\int_0^1 x \arctan x dx$

(5) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$　　　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$

(7) $\int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx$　　　　(8) $\int_1^{\pi} \sin(\ln x) dx$

2. 若 $f''(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，$f(0)=2$，$f(\pi)=1$，证明：$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\ \sin x dx = 3$。（提示：用分部积分法及凑微分法证明）

思考：用换元法计算定积分和不定积分的区别与联系。

第 30 次

5.4 反常积分

理解：

（1）无穷限反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的几何意义：由曲线$y=f(x)$与直线$x=a$、$y=0$所围成图形面积的代数和；无界函数反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$（$b$是瑕点）的几何意义：由曲线$y=f(x)$、直线$x=a$、$x=b$及$x$轴围成的向上（或向下）无穷伸展平面图像的面积。

（2）计算反常积分时首先要判断积分类型是无穷限积分还是瑕积分，再将原积分分为多个单一类型的反常积分逐个计算。

（3）反常积分应转化为定积分后再求极限。因此它收敛时，与常义积分具有相同的性质和积分方法，如换元法、分部积分法及牛顿—莱布尼茨公式。

（4）计算瑕积分时要特别注意找到所有瑕点，用极限的方法来求。

（5）关于奇、偶函数在对称区间上的定积分的性质的结论不能推广到反常积分，因为反常积分可能不存在。

1．判定下列各反常积分的收敛性，如果收敛，计算反常积分的值。

（提示：对无穷限反常积分，应先求原函数，再代值求极限，对无界函数反常积分应先找出瑕点，再分段求积分）

（1）$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}$　　　　（2）$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$

（3）$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x(\alpha>0)$　　　　（4）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$

（5）$\int_0^1 \frac{1}{3\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

（6）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$

（7）$\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$

（8）$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$

2．当 k 为何值时，反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ 收敛？当 k 为何值时，这反常积分发散？当 k 为何值时，这反常积分取得最小值？

第五章　复习与提高

1．（1）$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,\mathrm{d}x$　　　　（2）$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$

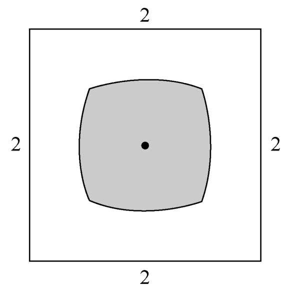
（3）$\int_{1/6}^{1/2} \csc \pi t \cot \pi t\,\mathrm{d}t$　　　　（4）$\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

（5）$\int_1^0 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$　　　　（6）$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2\sin x}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$

（7）$\int_0^{\pi/2} \cos x\sin(\sin x)\,\mathrm{d}x$　　　　（8）$\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$

（9）$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^4} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x$

2．右图正方形内部的阴影区域由这样的点构成：点到中心的距离小于到边的距离。请计算阴影部分的面积。



3．（1）$\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$

（2）$\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$

（3）$\int_0^1 \frac{y}{\mathrm{e}^{2y}}\mathrm{d}y$

（4）$\int_1^2 x^4(\ln x)^2\mathrm{d}y$

（5）$\int_0^t \mathrm{e}^s \sin(t-s)\mathrm{d}s$

（6）请证明：$\int f(x)\mathrm{d}x = xf(x) - \int xf'(x)\mathrm{d}x$。

4．假设一个质点 A 沿直线以速度 $v(t)=t^2\mathrm{e}^{-t}$（单位：m/s）运动。请问在开始运动的 T 秒内经过的路程是多少?

专业班级__________________　　姓名__________________　　学号__________________

第六章　定积分的应用

第 31 次

6.1　定积分的元素法

6.2　定积分在几何学上的应用（一）

1．求由下列各组曲线所围成的图形的面积。

（1）$y=x^2$ 与 $y=x$

（2）$y=x^2-2x+3$ 与 $y=x+3$

（3）$y=\dfrac{1}{2}x$、$y=3x$ 与 $y=1$、$y=2$

（4） $y^2 = 2x + 1$ 与 $x - y - 1 = 0$

（5） $y = x^2$、 $y = x$ 与 $y = 2x$

2．求由曲线 $\rho = 2a\cos\theta$ 所围成图形的面积。

3．求由曲线 $y = \mathrm{e}^{-x}$ 与其经过点 $(-1, \mathrm{e})$ 的切线及 x 轴所围成图形的面积。

4．求抛物线 $y^2 = 8x$ 与其在点 $(2, 4)$ 处的法线所围成图形的面积。

第 32 次

6.2　定积分在几何学上的应用（二）

1．求由下列已知曲线所围成的图形按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积。

（1）$y=x^2$ 及 $x=y^2$，绕 y 轴

（2）$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 及 $y=\pm b$、$x=0$，绕 y 轴

（3）$y=x^2$ 和 $y=2-x^2$，绕 x 轴

（4）$y=\sqrt{x}$、$x=1$、$x=4$ 及 $y=0$，绕 y 轴

（5） $y^2 = 3x$ 与 $x^2 + y^2 = 4$ 所围较小块图形，绕 x 轴

（6）由 $y = x^3$ 、 $x = 2$ 、 $y = 0$ 围成的图形，分别绕 x 轴，绕 y 轴

2．有一立体，以长半轴 $a = 10$ ，短半轴 $b = 5$ 的椭圆为底，而垂直于长轴的截面都是等边三角形，求其体积。

3．求曲线 $y = \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}$ 上对应于 $0 \leq x \leq 3$ 的一段弧的长度。

第 33 次

6.3　定积分在物理学上的应用

1．由实验知道，弹簧在拉伸过程中，需要的力 F （单位：N）与伸长量 s （单位：cm）成正比，即 $F=ks$ （ k 是比例常数）。如果把弹簧由原长拉伸 6cm，计算拉力所做的功。

2．一物体沿直线运动，其速度由公式 $v=\sqrt{1+t}$ （单位：m/s）给出，试求物体运动开始后 8 秒内所经过的路程。

3．有一等腰梯形闸门，它的两条底边长分别为 10cm 和 6cm，高为 20cm，较长的底边与水面相齐，计算闸门的一侧所受的水压力。

*4．设有一长度为 l，线密度为 μ 的均匀细直棒，在与棒的一端垂直距离为 a 处有一质量为 m 的质点，试求这细棒对质点的引力。（提示：$\int (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\dfrac{x}{a\sqrt{a^2+x^2}}+c$）

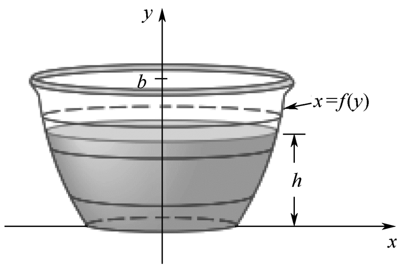
第六章　复习与提高

1．简单介绍水钟的工作原理：所谓水钟，“ 时刻 ” 被标记于容器壁，利用盛水容器液面高度变化计时。在容器底部设置一出水孔，由于液面高度变化导致底部液压发生变化，出水速度也会有相应变化，如果容器是柱体的话，这将导致液面高度变化速度不均匀。因此，有必要设计恰当的容器形状方便计时。令 $x = f(y)$ 是$[0, b]$上的连续函数，容器壁是由此曲线绕 y 轴旋转产生的轮廓。令 V 代表液体体积，h 对应时刻 t 时的液面高度。请回答：

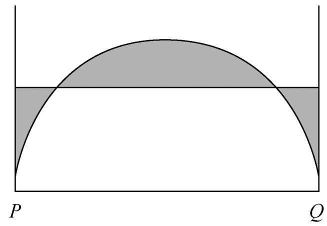
（a）确定 V 和 h 的函数关系；

（b）计算 V 和 h 的相关变化率：$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t=\pi[f(h)]^2\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ ；

（c）假设 A 为容器底部出水孔的面积。根据托里切利定律，液体体积的变化满足 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=kA\sqrt{h}$，其中 k 是一个负值常数。请确定恰当的 $x = f(y)$，以使 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$ 为常值 C。请叙述 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = C$ 的实际意义和好处。



2. 下图是一个直径为 2 的半圆，PQ 是直径，左右两条竖线是过 P，Q 的切线。请选择恰当位置放置水平直线，使得阴影部分面积最小。



专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

自测题（一）

一、选择题

1. 当 $x\to\infty$ 时，若 $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ 与 $\dfrac{1}{x+3}$ 为等价无穷小，则 a，b，c 一定为（　　）

A. 0，1，3

B. 0，1，任意常数

C. 0，任意常数，任意常数

D. a、b、c 均为任意常数

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{\sin\pi x+1}-\arctan(\cos\pi x)}{x^2-x-1}=$ （　　）

A. 0　　　　B. $1+\dfrac{\pi}{4}$

C. 1　　　　D. 不存在

3. 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$，其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的（　　）

A. 连续点

B. 第一类间断点

C. 第二类间断点

D. 不能由此确定是连续点还是间断点

4. 若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值，则必有（　　）。

A. $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)>0$

B. $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)<0$

C. $f'(x_0)=0$

D. $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

5. $\int_{-1}^{1}(x^2\sqrt{1+x^3}-\dfrac{x\cos x}{1+x^2})\,\mathrm{d}x=$（　　）

A. 0　　　　B. $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

C. $\dfrac{8\sqrt{2}}{9}$　　　　D. $\dfrac{4}{9}$

6. 若 $f(x)$ 的导数为 $\sin x$，则 $f(x)$ 有一个原函数为（　　）

A. $1-\sin x$　　　　B. $1+\sin x$

C. $1+\cos x$　　　　D. $1-\cos x$

7. 函数 $y=x\mathrm{e}^{-x}$ 在区间（　　）内是单调减少的并且其图形是凸的。

A. $[2,+\infty)$　　　　B. $(-\infty,1]$

C. $[1,2]$　　　　D. $[1,+\infty)$

8. 下列反常积分收敛的是（　　）

A. $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$　　　　B. $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3}}$

C. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$　　　　D. $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

二、填空题

1. 已知 $f(0)=\mathrm{e}^2$，$f(x)=(1+\frac{x}{a})^{\frac{1}{x}}$，若 $x\neq 0$，则 $a=$________时，$f(x)$ 连续。

2. 函数 $y=2^x$ 的 n 阶麦克劳林展式中 x^n 的系数是____________________。

3. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t\mathrm{e}^t+1\\ y=t^3-3t\end{cases}$ 确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=1}=$____________。

4. $\int\frac{\sin 4x}{\cos^2 2x+4}\mathrm{d}x=$_________________。

5. $\int_0^a\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=$__________________。

6. 已知 $F(x)=\int_0^x(x^2-t)\,\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=$________________。

三、计算题

1. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^x-1-x)^2}{\ln(x+x^2\sin^3x)-\ln x}$。

2. 证明：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$。

3．求由曲线 $y^2 = x - 1$、直线 $y = 2$ 与 x 轴、y 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得立体之体积。

4．设函数 $f(x) = \int_0^x (t-3)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$，试求 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的最小值。

5．求星形线 $x = a\cos^3 t$、$y = a\sin^3 t$ 围成的面积。

6. 已知$\begin{cases} u=\sin\left(x+\mathrm{e}^t\right) \\ v=\cos^2 x \end{cases}$，其中$x=\varphi(t)$，且$\varphi(t)$二阶可导。计算$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$和$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2}$（结果用$t$表示）。

7. 已知$y(x)=\int_x^x[\sin t\cos t+(2t-1)^{1000}+998t^{999}]\mathrm{d}t$，求$y^{(1001)}(x)$。

8. 可口可乐公司要设计一个容量为V的圆柱体易拉罐饮料瓶，且罐顶面、底面、侧面的厚度之比是3 : 2 : 1。试问易拉罐的半径和高的比例等于多少时所用材料最省？

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

自测题（二）

一、选择题

1．下列函数中与 $y=x$ 为同一函数的是（　　）。

A．$y=\sqrt{x^2}$　　B．$y=(\sqrt{x})^2$

C．$y=\ln e^x$　　D．$y=e^{\ln x}$

2．$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}=$（　　）。

A．e　　B．e^{-1}

C．e+1　　D．$e^{-1}+1$

3．设函数 $f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x} & (当x\neq 0时) \\ a & (当x=0时) \end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$（　　）。

A．0　　B．1

C．$\frac{\pi}{2}$　　D．∞

4．$x=1$ 是函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 的（　　）。

A．连续点　　B．振荡间断点

C．无穷间断点　　D．可去间断点

5．设函数 $f(x)=x\ln x$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=2$，则 $f(x_0)=$（　　）。

A．0　　B．e

C．1　　D．e^2

6．函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微的充分必要条件是（　　）。

A．$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续　　B．$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

C．$f_+'(0)$ 与 $f_-'(0)$ 都存在　　D．$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 存在

7．如果函数 $f(x)$ 满足条件：在闭区间 $[a,b]$ 内连续，在开区间 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得（　　）。

A．$f(\xi)=0$　　B．$f'(\xi)=0$

C．$f'(\xi)(b-a)=f(b)-f(a)$　　D．$f(\xi)(b-a)=f(b)-f(a)$

8．$f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数为（　　）。

A. $1+\sin x$　　B. $1-\sin x$

C. $1+\cos x$　　D. $1-\cos x$

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}=$ ________。

2. 设$\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ ____________。

3. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{\sin x}=1$，则$a=$ ________。

4. 已知函数$y=f(x)$，由方程$e^y-x+y^2=0$确定，$dy=$ ____________。

5. $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\cos t^2 dt=$ ___________________。

三、计算题

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

2. 求曲线$y=x^4-3x^2-2$上点$(1,-4)$处的切线方程和法线方程。

3. $y=\ln(x^3+2)$，求y''。

4. 求 $f(x)=x-\ln(1+x)$ 的单调区间和极值。

5. 计算 $\int \frac{x}{(x^2+1)}\mathrm{d}x$ 。

6. 计算 $\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x$ 。

7. 计算 $\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$ 。

8. 求由曲线 $y=x^2$ 与 $y=x+2$ 所围成图形的面积。

9．求由 $y=x^3$、$x=2$ 及 $y=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

四、证明题

证明：当 $x>0$ 时，不等式 $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$ 成立。

五、应用题

欲做一个底为圆形，容积为 $10\pi\mathrm{m}^3$ 的圆柱体有盖容器，问如何设计容器，所用材料最省？如果是开口容器，又应该如何设计？

专业班级________________　　　姓名________________　　　学号________________

自测题（三）

一、选择题

1. 函数 $z=\ln(x^2+y^2-2)+\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的定义域为（　　）。

A. $x^2+y^2\neq 2$　　　B. $x^2+y^2\neq 4$

C. $x^2+y^2\geqq 2$　　　D. $2<x^2+y^2\leqq 4$

2. 利用变量替换 $u=x$，$v=\dfrac{y}{x}$，一定可以把方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$ 化为新的方程（　　）。

A. $u\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$　　　B. $v\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$

C. $u\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$　　　D. $v\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$

3. 若 $f(x)=-f(-x)$，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内（　　）。

A. $f'(x)<0$，$f''(x)<0$

B. $f'(x)<0$，$f''(x)>0$

C. $f'(x)>0$，$f''(x)<0$

D. $f'(x)>0$，$f''(x)>0$

4. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $F(x)=\int_x^{\mathrm{e}^{-x}}f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=$（　　）。

A. $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$　　　B. $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$

C. $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$　　　D. $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$

5. 设 $f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且 $f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)<0$。记 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$，则有（　　）。

A. $S_1<S_2<S_3$　　　B. $S_2<S_3<S_1$

C. $S_3<S_1<S_2$　　　D. $S_1<S_3<S_2$

6. 下列命题中，正确的是（　　）。

A. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的一般项有 $u_n<v_n(n=1,2\cdots)$，则有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n<\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$

B. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1(n=1,2,\cdots)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

C．若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

D．若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R(0 < R < +\infty)$，则 $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$

7．微分方程 $(x+y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ 的通解是（　　）

A．$x+y+\ln(x+y)=c$

B．$x-y+\ln(x+y)=c$

C．$x+y-\ln(x+y)=c$

D．$x-y-\ln(x+y)=c$

二、填空题

1．设 $x^2+z^2=y\phi(\frac{z}{y})$，其中 ϕ 可微，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$__________。

2．设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\phi(x+y)$，其中 f 、ϕ 具有二阶连续导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$__________。

3．设 D 由 $y=x^2$， $y=2x^2$， $y=1$， $y=2$ 围成（$x \geq 0$），则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 在直角坐标系下的两种积分次序为______________和______________。

4．设 D 为 $0 \leq y \leq 1-x$， $0 \leq x \leq 1$，则 $\iint\limits_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的极坐标形式的二次积分为____。

5． $\int_0^1 x(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots)\mathrm{d}x=$________________________。

6．微分方程 $4y''-20y'+25=0$ 的通解为__________。

三、解答题

1．设 $z=f(2x-y, y\sin x)$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

2．在过点 $P(1,3,6)$ 的所有平面中，求一平面，使之与三个坐标平面所围四面体的体积最小。

3．$\iint |x^2+y^2-4|\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为圆域 $x^2+y^2 \leq 9$。

4．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-4)^n$ 收敛区间及和函数 $S(x)$。

5．设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma \mathrm{e}^x$ 的一个特解为 $y=\mathrm{e}^{2x}+\left(1+x\right)\mathrm{e}^x$，试确定 α、β、γ，并求该方程的通解。

6．设 L 为 $x^2+y^2=x$ 从点 $A(1,0)$ 到 $O(0,0)$ 的上半圆弧，请计算第二类曲线积分 $\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-y+1)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-1)\,\mathrm{d}\,y$ 。

7. 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，请给出点 P 的坐标以及经过该点的切平面和法线方程。

8．设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (0\le x\le 1)\\ 1 & (1<x\le \pi)\end{cases}$，请将它分别展开为正弦级数和余弦级数。

高等数学习题册（下）

主　编　杨　新　张泽麟
副主编　陈　勇　陈　凯

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本习题册与同济大学数学系编写的《高等数学（第七版）》教材配套使用，内容包括：函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。每章包含复习题，最后有三套自测题，便于学生考试复习。本习题册的形式为学生作业本，一方面比较规范，便于教师批改，另一方面减轻了学生抄作业题的负担，同时也便于作业本的保留。

本书可作为应用型本科高校、高职高专院校理工科专业大学数学课程配套习题册。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题册：全 2 册 / 杨新，张泽麟主编. —北京：电子工业出版社，2016.8

ISBN 978-7-121-29672-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①杨… ②张… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—习题集 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 189199 号

策划编辑：郭乃明
责任编辑：郭乃明　　特约编辑：范　丽
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：25　字数：333 千字
版　　次：2016 年 8 月第 1 版
印　　次：2016 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：59.00 元（上、下册）

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254561，guonm@phei.com.cn。

前　　言

本书是同济大学应用数学系编写的《高等数学（第七版）》的配套练习册。为促进学生全面掌握所学知识，方便教师考查学生学习状况，我们将每小节最基本、最重要的知识进行梳理，并给出针对性的习题以强化学生基础能力，最后将前期工作进行整合、汇编，出版了该配套练习册。该习题册进一步对教学理念进行深化、分层，习题类型全面、内容详实。每章带有复习与提高部分，对计算要求较多的章节以巩固基本的理论计算能力为主，对应用要求较多的章节以强化实际分析解决问题的能力为重，有区别地增加各章复习题，提高学生数学能力。

本练习册的特点：(1）强化大纲要求，每节习题侧重对知识点的覆盖，对基础知识、基本技能的考查，对重点知识的强调，旨在夯实基础，为进一步学习奠定理论基石；(2）“提高部分”注重综合能力和创新能力的培养，将研究性学习与数学教学结合起来，为学生营造探究、体验、创造的开放性平台，促使学生更加深入地应用知识，培养创新能力及创造性思维；(3）选题广泛、典型、新颖，注重解题基本技巧训练和理论联系实际能力锻炼；(4）增设期末“自测题”，有助于学生及时自我检测学习效果，以更好地理解所学知识，并对期末考试进行初步复习。

该套练习册的编写融入了教师多年教学经验，相信它能对进一步提高大学数学的教学质量，对同学们掌握好高等数学的基本概念，准确理解抽象概念，提高运用数学构建现实模型并求解的能力以及对日后继续深造均能起到重要的作用。

本练习册上册的主要内容包括极限与连续、导数和微分计算、导数的应用、不定积分基本计算、定积分基本计算和积分学基本应用共 6 个部分，和《高等数学（同济版）》对应章节的教学安排基本一致，只要按阅读顺序使用即可。每章末的复习与提高中给出了一些实际问题，建议由教师指导学生分组讨论，给出详细求解过程并进行 PPT 演讲，培养学生实践能力。

本书由杨新、张泽麟任主编，陈勇、陈凯任副主编，安世勇等人参与编写。在历次教学活动中数理教研室的同事们均对内容提出过许多有价值的意见，在此一并表示致谢。由于水平有限，书中难免有不妥之处，挚诚欢迎批评指正。

编者
2016 年 7 月

目　　录

第七章　微分方程

第 1 次

7.1　微分方程的基本概念

理解：（1）微分方程的概念

（2）微分方程的阶

（3）微分方程的解与通解

（4）微分方程的初始条件、特解与初值问题

（5）积分曲线

1．试说出下列微分方程的阶数。

（1）$(y')^3-2yy'+x=0$　　（2）$xy'''+4y'+x^4y^2=0$

（3）$(y'')^2+5(y')^3-x^2y=0$　　（4）$L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{C}=0$

2．指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解。

（1） $y'' = x^2 + y^2$， $y = \frac{1}{x}$

（2） $y'' - 2y' + y = 0$， $y = x^2 e^x$

3．验证 $y = \sin(x + c)$ 是微分方程 $(y')^2 + y^2 - 1 = 0$ 的通解，并验证 $y = \pm 1$ 也是解。

*4．试求解微分方程 $x^2 y'' + 6xy' + 4y = 0$ 的形如 $y = x^\lambda$ 的解。

思考：（1）所有的微分方程都有通解吗？

（2）微分方程的通解包含了微分方程的一切解吗？

第 2 次

7.2 可分离变量的微分方程

7.3 齐次方程

1．求下列微分方程的通解。

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2y$

（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x-y}$

（3）$2x^2+3x-2y'=0$

（4）$y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$

2．求下列齐次方程的通解。

（1） $xy' - y - \sqrt{y^2 - x^2} = 0$

（2） $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$

3．求下列微分方程满足所给初始条件的特解。

（1） $y' = e^{2x-y}$， $y|_{x=0} = 0$

（2） $x\mathrm{d}y + 2y\mathrm{d}x = 0$， $y|_{x=2} = 1$

4．一曲线通过点 $(2,3)$，它在两坐标轴间的任意切线段均被切点所平分，求此曲线方程。

思考：在采用分离变量法求解微分方程的过程中，常要将微分方程变形，这样会不会使微分方程产生“失解”和“增解”的现象？

第 3 次

7.4 一阶线性微分方程

记住：（1）一阶线性微分方程的概念及标准一阶线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解公式：$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)$

（2）常数变易法

1．求下列微分方程的解。

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\cos x=\mathrm{e}^{-\sin x}$

（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3y=2$

（3）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin x}{x}$

（4）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=4x$

2．求微分方程 $xy'+y-\mathrm{e}^x=0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=2$ 的特解。

3．用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程，然后求出通解。

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$

（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x-y}+1$

思考：一阶线性微分方程的通解是否包含了该方程的一切解？

第 4 次

7.5 可降阶的高阶微分方程

记住：用降阶法解如下类型的高阶微分方程的一般方法。

（1） $y^{(n)}=f(x)$，用逐次积分法降阶。

（2） $y''=f(x,y')$，令 $y'=p$，则 $y''=p'$，降阶为 $p'=f(x,p)$。

（3） $y''=f(y,y')$，令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，降阶为 $p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$。

1．求下列微分方程的通解。

（1） $y'''=\cos x+\sin x+3$

（2） $y''=y'+x$

（3） $yy'' + 2(y')^2 = 0$

2．求微分方程 $y^3 y'' + 1 = 0$ 满足所给初始条件 $y|_{x=1} = 1$， $y'|_{x=1} = 0$ 的特解。

3．试求 $y'' = x$ 的经过点 $M(0,1)$ 且在此点与直线 $y = \dfrac{x}{2} + 1$ 相切的积分曲线。

第 5 次

7.6 高阶线性微分方程

记住：（1）二阶非齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$。

（2）二阶齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$。

（3）齐次和非齐次线性微分方程通解的结构。

（4）叠加原理。

1．下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的。

（1）x，x^3

（2）e^{3x}，$2\mathrm{e}^{3x}$

（3）$\cos 3x$，$\sin 3x$

（4）$x\mathrm{e}^{x^2}$，$x^2\mathrm{e}^x$

2．验证 $y_1 = \mathrm{e}^{x^2}$ 与 $y_2 = x\mathrm{e}^{x^2}$ 都是微分方程 $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ 的解，并写出该方程的通解。

3．验证以下推断。

（1） $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{12}\mathrm{e}^{5x}$（$C_1, C_2$ 是任意常数）是方程 $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{5x}$ 的通解。

（2） $y = C_1x^2 + C_2x^2\ln x$（C_1, C_2 是任意常数）是方程 $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ 的通解。

思考：二阶线性微分方程的通解是否包含了该方程的一切解？

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第 6 次

7.7 常系数齐次线性微分方程

7.8 常系数非齐次线性微分方程

记住：（1）二阶常系数齐次线性微分方程求通解的欧拉指数法（求解方程的特征根）。

（2）二阶常系数非齐次线性微分方程求通解的待定系数法。

1．求下列微分方程的通解。

（1） $y''-2y'-3y=0$

（2） $y''+y=0$

（3） $y^{(4)}-y=0$

2．求下列微分方程的通解。

（1） $2y'' + y' - y = 2e^{x}$

（2） $y'' - 3y' = e^{5x}$

（3） $y'' - 2y' + 5y = e^{x}\sin 2x$

3. 求一个四阶的常系数齐次线性微分方程, 使之有如下 4 个特解：$y_1 = e^{x}$, $y_2 = xe^{x}$, $y_3 = \cos 2x$， $y_4 = 2\sin 2x$，并求此次微分方程的通解。

思考：如果二阶线性齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 中的系数 $p(x)$ 或 $q(x)$ 不是常数，能否用欧拉指数法求通解？

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第七章　复习与提高

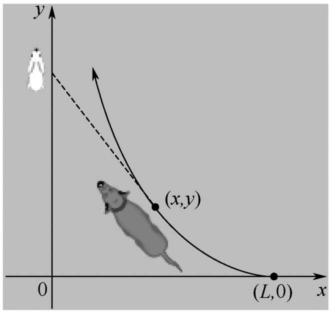
1．某日从早晨开始下雪一直持续到下午。中午时铲雪车以一个恒定的效率为一条道路除雪，从 12:00 到 13:00 清除了 6km 积雪，但是在 13:00 到 14:00 仅清除了 3km 积雪。请问，这天下雪的开始时间是几点?

2．猎犬发现野兔沿一条直线逃跑并开始追逐。为解题简便，我们建立下图的直角坐标系进行分析，假设：

（1）开始野兔位于原点，猎犬位于$(L, 0)$。

（2）野兔始终沿 y 轴逃跑，而猎犬始终正对着野兔追逐。

（3）猎犬速率和野兔相等。



请计算回答以下问题：

（a）请证明猎犬奔跑路线满足微分方程：$x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\sqrt{1+(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}$ 。

(b) 求出 (a) 满足初始条件 $y(L)=y(L)'=0$ 的特解。(提示：令 $z=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 以降阶，求出 z 再积分)

(c) 猎犬能追上野兔吗？如果猎犬速率为野兔两倍，请找出猎犬追上野兔时所处的位置。

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第八章 空间解析几何与向量代数

第 7 次

8.1 向量及其线性运算

理解：向量的概念及其表示、单位向量、向量的模、方向角与方向余弦、投影；掌握向量的线性运算，用坐标表达式进行向量运算的方法。

1．已知两点 $M_1(-\pi,\pi)$ 和 $M_2(1,-1,0)$，试用坐标表达式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$ 。

2．求平行于向量 $\vec{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量。

3．设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角。

4．设向量 $\vec{a}$ 的模是 4，它与 u 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，求 $\vec{a}$ 在 u 轴上的投影。

5．一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4、-4 和 7，求这向量的起点 A 的坐标。

思考：向量之间能比较大小吗？

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第 8 次

8.2 数量积 向量积 *混合积

1．设$\vec{a}=3\mathrm{i}-\mathrm{j}-2\mathrm{k}$，$\vec{b}=\mathrm{i}+2\mathrm{j}-\mathrm{k}$，求下列式子的计算结果。

（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$及$\vec{a}\times\vec{b}$

（2）$(-2\vec{a})\cdot 3\vec{b}$及$\vec{a}\times 2\vec{b}$

（3）$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角的余弦

2．设$\vec{a}=2\mathrm{i}+\mathrm{j}-3\mathrm{k}$，$\vec{b}=\mathrm{i}-\mathrm{j}+2\mathrm{k}$，求下列式子的计算结果。

（1）$3\vec{a}\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$

（2）$(\vec{a}+2\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$

3．已知$M_1(1,-1,2)$，$M_2(3,3,1)$，$M_3(3,1,3)$，求与$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$同时垂直的单位向量。

4．设$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$为单位向量，且满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，求$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$。

第 9 次

8.3　曲面及其方程

1．建立以点 $(1,3,-2)$ 为球心且通过坐标原点的球面方程。

2．将 xoz 坐标平面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周，所生成的旋转曲面方程为（　　）。

A．$z^2=5(x^2+y^2)$

B．$z^2=5(x^2-y^2)$

C．$z^2+y^2=5x$

D．$z^2-y^2=5x$

3．求下列旋转曲面的方程。

（1） yoz 平面上曲线 $z^2=3x^2$ 绕 z 轴旋转一周。

（2） xoy 平面上曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$ 绕 y 轴旋转一周。

4．说明下列旋转曲面是怎样形成的。

（1） $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$

（2） $x^2-y^2-z^2=1$

思考：是否所有的三元二次方程都表示曲面？

第 10 次

8.4 空间曲线及其方程

1．指出下列方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形。

（1）$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

2．空间曲线$\Gamma\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=t^2\end{cases}$，绕$z$轴旋转得一旋转曲面，求此旋转曲面的方程。

3．分别求出母线平行于x轴及y轴而且通过曲线$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$的柱面方程。

4．求球面$x^2+y^2+z^2=9$与平面$x+z=1$的交线在xoy平面上的投影的方程。

第 11 次

8.5 平面及其方程

1．求过点 $(2,1,0)$ 且与平面 $2x-3y+4z-2=0$ 平行的平面方程。

2．求平行于 x 轴且过点 $(4,0,-2)$ 和点 $(5,1,7)$ 的平面方程。

3．分别按下列条件求平面方程。

（1）平行于 xoz 平面且经过点 $(2,-5,3)$ 。

（2）通过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$。

（3）平行于 x 轴且经过点 $(4,0,-2)$ 和点 $(5,1,7)$。

4．求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离。

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

第 12 次

8.6 空间直线及其方程

1. 求过点 $(2,1,3)$ 且平行于直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ 的直线方程。

2. 用对称式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$。

3．求过点$(0,2,4)$且与两平面$x+2z=1$和$y-3z=2$平行的直线方程。

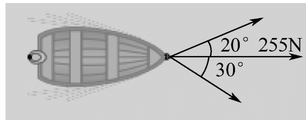
4．求过点$(3,1,-2)$且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程。

5．求点$(-1,2,0)$在平面$x+2y-z+1=0$上的投影。

专业班级________________ 姓名________________ 学号________________

第八章 复习与提高

1．渔民用两条绳子将船拉到岸边，如下图所示。如果需要 255 N 的拉力，请计算每条绳子上的拉力。另外，给出合力和两条绳子分别的拉力及夹角的关系。



2．某飞机可以在无风环境中以 180 km/h 的速度飞行。飞行员从机场出发后，根据罗盘指示朝着正北方向飞行，目的地位于机场正北 200km 处。30 分钟之后，飞行员发现飞机受到风的影响，实际是到达北偏东 5°，距机场 80 km 处。请计算回答：

（a）假设风速恒定，请给出其大小及方向。

（b）欲到达原定目的地，飞行员应该如何调整飞行方向？

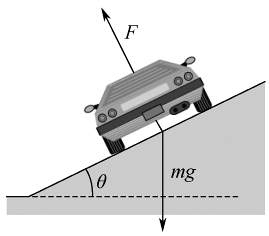
3．为避免汽车在过弯时由于摩擦力不足发生侧滑，高速公路在弯道（假设是半径为 R 的圆弧段）处须设计一定的倾角 θ 。摩擦力丢失往往是由路面积水或积雪造成的。弯道处的额定速度 v_{R} 是指汽车过弯时不产生侧滑的最大速度。假设质量为 m 的汽车正以额定速度 v_{R} 在弯道行驶，它将受到两个力的作用：竖直方向大小为 mg 的重力；由路面产生的支持力 $\boldsymbol{F}$ （见下图）。

$\boldsymbol{F}$ 的竖直方向分力可平衡汽车重力，于是 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta = mg$ ，而它的水平方向分力，由牛顿第二定律可知，满足 $|\boldsymbol{F}|\sin\theta = \dfrac{m{v_{\mathrm{R}}}^2}{R}$ 。

（a）证明 ${v_{\mathrm{R}}}^2 = Rg\tan\theta$ 。

（b）设弯道半径是 125 米，倾角设计为 12°，请计算额定速度。

（c）工程师在设计时，希望保持倾角不变，但将额定速度提高 50%，请问应怎样修正设计方案？即，如何调整弯道半径？



专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

第九章　多元函数微分法及其应用

第 13 次

9.1　多元函数的基本概念

1．判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集，并分别指出它们的聚点所成的点集（称为导集）和边界。

（1）$\{(x,y)\,|\,x\neq 1, y\neq 1\}$

（2）$\{(x,y)\,|\,4\leq x^2+y^2\leq 9\}$

2．求下列各函数的定义域。

（1）$z=\ln(x+y-1)$

（2） $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$

3．求下列各极限。

（1） $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x+y-1}{xy+1}$

（2） $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{\ln(xy+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

（3） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

（4） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\sin xy}{x}$

4．证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x}{x+y}$ 不存在。

思考：判定二重极限不存在，常用下列两种方法。

（1）选取 $p\to p_0$ 的一种形式，通常取沿某条过 p_0 的直线或曲线趋于 p_0，按此方式极限 $\lim\limits_{p\to p_0}f(p)$ 不存在。

（2）找出 $p\to p_0$ 的两种方式，通常取沿两条过 p_0 的直线或曲线 C_1,C_2，使得 $\lim\limits_{\substack{p\to p_0\\ p\in C_1}}f(p)=A_1$， $\lim\limits_{\substack{p\to p_0\\ p\in C_2}}f(p)=A_2$，且 $A_1\neq A_2$。

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

第 14 次

9.2　偏导数

1．求下列函数的偏导数。

（1）$z = x^2 y + y^2 x$

（2）$z = \ln(x^2 + y^2)$

（3）$z = \ln \tan \frac{x}{y}$

（4）$u = x^{\frac{y}{z}}$

2．曲线$\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$在点$(2,4,5)$处的切线对于$x$轴的倾角是多少？

3．求下列函数的$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

（1）$z=x^3+y^3+x^2y+yx^2$

（2）$z=y^x$

*4．验证$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$满足$\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$。

思考：二元函数可偏导（即存在偏导数）与连续有没有联系？

第 15 次

9.3 全微分

1．求下列函数的全微分。

（1） $z=3x^2y+\dfrac{x}{y}$

（2） $z=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$

2．求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2$， $y=1$， $\Delta x=0.1$， $\Delta y=0.1$ 时的全增量和全微分。

3．求函数 $z=\mathrm{e}^{xy}$ 当 $x=1$， $y=1$， $\Delta x=0.15$， $\Delta y=0.1$ 时的全微分。

*4．已知边长为 x=6m 与 y=8m 的矩形，如果 x 边增加 5cm 则 y 边减少 10cm，问这个矩形的对角线的近似变化是怎样的？

思考：二元函数的可微性与连续性、可微性与可偏导的关系。

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

第 16 次

9.4　多元复合函数的求导法则

1．设 $z=u^2-v^2$，$u=x-y$，$v=x+y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

2．设 $z=\mathrm{e}^{x+y}$，$x=\cos t$，$y=t^2$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$。

3．设 $z=\ln(x+y)$，$y=\mathrm{e}^x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$。

4．设$z=\arctan\frac{x}{y}$，而$x=u+v$，$y=u-v$，验证$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$。

5．设$u=f(x,y,z)$，$y=\varphi(x,t)$，$t=\psi(x,z)$，其中函数f，φ，ψ都可微，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$。

第 17 次

9.5 隐函数的求导公式

1. 设 $x^2y+\mathrm{e}^y+\cos x=0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

2. 设 $\mathrm{e}^z-xyz=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,0)}$。

3. 设 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

4. 设$z^3-3xyz=a^3$，求x^2+y^2=$2z$， $z=2$。

*5. 设方程组$\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$。

思考：总结求隐函数的导数或偏导数的方法。

第 18 次

9.6 多元函数微分学的几何应用

1．求曲线 $y^2 = 4x$， $z^2 = 2 - x$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程。

2．求曲线 $x = t$， $y = t^2$， $z = t^3$ 上的某一点，使在该点的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$。

3．求 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面及法线方程。

4．求 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切平面及法线方程。

5．在曲面 $z = xy$ 上求一点，使该点处法线垂直于平面 $3x + y + z + 1 = 0$，并写出该法线方程。

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

第 19 次

9.7　方向导数与梯度

1．求函数 $z=x^2y+y^2x$ 在点 $(1,2)$ 处沿从点 $(1,2)$ 到点 $(2,3)$ 的方向的方向导数。

2．求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 在点 $(1,2)$ 处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数。

3．求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向角为 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数。

4．设 μ，求 $\mathbf{grad}\, f(0,0,0)$ 及 $\mathbf{grad}\, f(1,1,1)$。

5．求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $p(1,4)$ 处变化最快的方向，并求沿这个方向的方向导数。

思考：如果函数 $f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 沿各方向的方向导数都存在，那么能否断定 $f(x,y)$ 在点 p_0 连续？

专业班级__________________　　姓名__________________　　学号__________________

第 20 次

9.8　多元函数的极值及其求法

1．求函数 $f(x,y)=2(x-y)-x^2-y^2$ 的极值。

2．求函数 $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$ 的极值。

3．求函数 $z=xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值。

4．要造一个体积等于 K 的长方体无盖水池，应如何选择水池的尺寸，方可使它的表面积最小？

5．求表面积为 4 的有盖长方体铁盒的最大容积。

专业班级____________________　　　　姓名____________________　　　　学号____________________

第九章　复习与提高

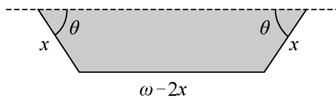
1．声波在海水中的传播速度与水温、盐度、压力有关。可以用以下函数表示：C=1449.2+4.6T-0.055T^2+0.00029T^3+(1.34-0.01T)(S-35)+0.016D，其中 C 是速度（m/s），T 代表水温（℃），S 是盐度（每 1000 克海水中溶解的盐的克数），D 是海水深度（米）。计算 $\partial C/\partial T$，$\partial C/\partial S$，$\partial C/\partial D$，设 $T=10$，$S=35$，$D=100$。解释每个偏导数的物理含义。

2．假设 $z=f(u,v)$，其中 $u=xy$，$v=y/x$ 而且 f 具有连续的二阶偏导数，请证明：$x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4uv\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2v\dfrac{\partial z}{\partial v}$。

3．将一块很长的镀锌薄钢板两边弯折起来，制成一个对称形状的水槽。设钢板宽度为 w，弯折方法如下图所示。

（a）为使水流量尽可能大，即横截面面积最大化，请给出弯折方案。

（b）如果将钢板弯折为半圆弧（或者其他曲线形状，如二次曲线等），效果是否更好？



4．找出和 $xy^2z^2=1$ 相切的平面中，距离原点最远的那个平面。

第十章　重积分

第 21 次

10.1　二重积分的概念与性质

10.2　二重积分的计算法（一）

1．根据二重积分的性质，比较下列积分的大小。

（1）$\iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 \mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由 X 轴、Y 轴与直线 $x+y=1$ 围成

（2）$\iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 \mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成

2．根据二重积分的性质估计下列积分的值。

（1）$I=\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$

（2）$I=\iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq \pi,\ 0\leq y\leq \pi\}$

3．利用二重积分的几何意义，直接给出下列积分的值。

（1）$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$ （$D:x^2+y^2\leq 1$）

（2）$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma$（$D: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leq 1$）

4．计算下列二重积分。

（1）$\iint\limits_D (3x+2y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域

（2）$\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $y=x$， $x=2$， $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 所围成

5．化二重积分 $I=\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 为二次积分（分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分），其中积分区域 D 是由 x 轴及半圆周 $x^2+y^2=r^2(y\geq 0)$ 所围成的闭区域。

第 22 次

10.2 二重积分的计算法（二）

1．改换下列二次积分的积分次序。

（1）$\int_{1}^{3}\mathrm{d}x\int_{x-1}^{2}f(x,y)\mathrm{d}y$

（2）$\int_{0}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x$

2．化下列二次积分为极坐标形式的二次积分。

（1）$\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$

（2）$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

3．选用适当的坐标计算下列各题。

（1）$\iint\limits_D x\mathrm{e}^y \mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=x^2$， $y=1$， $x=2$ 围成

（2）$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$， $D: x^2+y^2 \leq 4$， $x \geq 0$， $y \geq 0$

4．求由平面 $y=0$， $y=kx(k>0)$， $z=0$，以及球心在原点，半径为 R 的上半球面所围成的在第一象限内的立体的体积。

第 23 次

10.3 三重积分

1. 化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次积分，其中积分区域 Ω 分别如下。

（1）由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的闭曲线

（2）由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭曲线

2. 利用合适的坐标计算下列三重积分。

（1） $I=\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}v$，其中 Ω 为 $x=0$， $y=0$， $x+y+z=1$ 所围成的区域

（2）$I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为由曲面 $z=x^2+4y^2$ 及 $z=1$ 所围成的区域

（3）$I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中 Ω 为由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的区域

（4）$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 为由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的区域

第 24 次

10.4 重积分的应用

1．求由 $z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体体积。

2．求底圆半径相等的两个正交圆柱面，$x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积。

3．设有一等腰直角三角形薄片，腰长为 a，各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方，求这薄片的质心。

4．已知均匀矩形板（面密度为常量 μ）的长和宽分别为 b 和 h，计算此矩形板对于通过其中心，且分别与一边平行的圆周的转动惯量。

第十章 复习与提高

1．先改变积分次序，再计算积分。

（1）$\int_0^1\int_x^1\cos(y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ （2）$\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1\frac{y\mathrm{e}^{x^2}}{x^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

2．计算下列多重积分。

（1）$\iint_R y\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}\sigma$，其中$R=\{(x,y)\,|\,0<x<2，\ 0\le y\le 3\}$。

（2）$\iint_D\frac{y}{1+x^2}\mathrm{d}\sigma$，其中$D$为由$y=\sqrt{x}$，$y=0$及$x=1$围成的图形。

（3）$\iint_D(x^2+y^2)^{3/2}\mathrm{d}\sigma$，其中$D$为由$y=0$、$y=\sqrt{3}$及$x^2+y^2=9$围成的图形位于第一象限内的部分。

（4）$\iiint\limits_{E} y^2z^2\mathrm{d}V$，其中 E 由抛物面 $x=1-y^2-z^2$ 和直线 $x=0$ 围成。

（5）$\int_0^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}(x^3+xy^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$（提示：使用极坐标）

（6）$\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（提示：用球面坐标）

3．求底面为 xoy 平面内以点（1,0）、点（2,1）及点（4,0）为顶点的三角形的棱柱被面 $z=x^2y$ 截断的剩余部分的体积。

4．证明：$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 1/(1-xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$

专业班级________________ 姓名________________ 学号________________

第十一章 曲线积分与曲面积分

第 25 次

11.1 对弧长的曲线积分

计算下列对弧长的曲线积分。

（1）$\int_L (x+y)\mathrm{d}s$，其中 L 为连接（1,0）及（0,1）两点的直线段

（2）$\int_L \cos y\,\mathrm{d}s$，其中 L 为原点至点（2,1）的直线段

（3）$\oint_L x\mathrm{d}s$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界

（4）$\int_\varGamma x^2yz\,\mathrm{d}s$，其中 $\varGamma$ 为折线 $ABCD$，这里的 A，B，C，D 依次为点（0,0,0），点（0,0,2），点（1,0,2），点（1,3,2）

第 26 次

11.2　对坐标的曲线积分

1．计算下列对坐标的曲线积分。

（1）$\int_L (2x+y)\mathrm{d}x$，其中 L 为从点（-2,0）到点（0,2）的直线段

（2）$\int_L y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $x = R\cos t$， $y = R\sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧

2．计算$\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$，其中 L 分别如下。

（1）为抛物线 $y^2=x$ 上从点（1,1）到点（4,2）的一段弧

（2）从点（1,1）到点（4,2）的直线段

第 27 次

11.3 格林公式及其应用

1. 证明曲线积分$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-2xy^2)\mathrm{d}y$在整个坐标平面内与路径无关，并计算积分值。

2．利用格林公式，计算下列曲线积分。

（1）$\oint_L x^2y\mathrm{d}x-xy^2\mathrm{d}y$，其中$L$为正向圆周$x^2+y^2=a^2\ (a>0)$

（2）$\oint_L (2x-y+4)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y$，其中 L 为三角形正向边界，三角形三个顶点分别为点（0,0），点（3,0）和点（3,2）

3．设有一变力在坐标轴上的投影为 $X=x+y^2$，$Y=2xy-8$，这变力确定了一个力场，证明质点在此场内移动时，场力所做的功与路径无关。

思考：设 G 为平面单连通区域，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$在 G 内有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关与以下 4 个条件中的每一个等价：

① 对 G 内的任意有向闭曲线 L，有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$。

② $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分。

③ 向量值函数 $P\mathrm{i}+Q\mathrm{j}$ 是某个二元函数 $u(x,y)$ 梯度，即 $\mathbf{grad}\ u=P\mathrm{i}+Q\mathrm{j}$

④ $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 G 内恒成立。

第 28 次

11.4　对面积的曲面积分

1．计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}s$，其中 Σ 为抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$ 在 xoy 面上方的部分，$f(x,y,z)$ 分别如下。

（1）$f(x,y,z)=1$

（2）$f(x,y,z)=x^2+y^2$

2．计算下列对面积的曲面积分。

（1）$\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)\mathrm{d}s$，其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一象限的部分

（2）$\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)\mathrm{d}s$，其中 Σ 为平面 $2x+2y+z=6$ 在第一象限的部分

第 29 次

11.5 对坐标的曲面积分

1．计算下列对坐标的曲面积分。

（1）$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为平面$x+y+z=1$在第一象限的部分的上侧

（2）$\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的下半部分的下侧

（3）$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一象限内的部分的前侧

第 30 次

11.6 高斯公式 *通解与散度

1．利用高斯公式计算曲面积分。

（1）$\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为由直线$x=0$，$y=0$，$z=0$，$x=a$，$y=a$，$z=a$所围成的立体的表面的外侧

（2）$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中$\Sigma$是界于$z=0$和$z=3$之间的圆柱体$x^2+y^2\le 9$的整个表面的外侧

2．求向量 $A = yz\mathrm{i} + xz\mathrm{j} + xy\mathrm{k}$ 穿过 Σ 流向外侧的通量，其中 Σ 为圆柱 $x^2 + y^2 \le a^2$ $(0 \le z \le h)$ 的全表面。

3．求向量场 $A = (x^2 + yz)\mathrm{i} + (y^2 + xz)\mathrm{j} + (z^2 + xy)\mathrm{k}$ 的散度。

第 31 次

11.7 斯托克斯公式 *环流量与旋度

1. 利用斯托克斯公式，计算下列曲线积分。

（1）$\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$，其中 Γ 由圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，$x + y + z = 0$ 确定，若从 x 轴的正向看去，此圆周取逆时针方向

（2）$\oint_{\Gamma} 3y\mathrm{d}x - xz\mathrm{d}y + yz^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 由圆周 $x^2 + y^2 = 2z$ 及 $z = 2$ 确定，若从 x 轴的正向看去，此圆周取逆时针方向

2．求向量场 $A=-y\mathrm{i}+x\mathrm{j}+c\mathrm{k}$ （c为常量）的环流量，设闭曲线 $\varGamma$ 由圆周 $x^2+y^2=10$ 及 $z=0$ 确定（若从 z 轴的正向看去，$\varGamma$ 是逆时针方向）。

3．求向量场 $A=(2z-3y)\mathrm{i}+(3x-z)\mathrm{j}+(y-2x)\mathrm{k}$ 的旋度。

第十一章　复习与提高

1．令 $\boldsymbol{F}(x,y)=x(x+y)\vec{\mathrm{i}}+xy^2\vec{\mathrm{j}}$，使用格林定理计算在 $\boldsymbol{F}$ 作用下，将单位质点从原点沿 x 轴移动到(1, 0)再沿直线移动到(0, 1)，最后沿 y 轴回到原点这一过程中 $\boldsymbol{F}$ 所做的功。

2．麦克斯韦方程组描述时变电场 E 和时变磁场 H 的关系，具体形式如下：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0 \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$$

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{curl}\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

其中 c 代表光速。请计算并证明：

（a）$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\dfrac{1}{\mathrm{c}^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$ ，$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{H})=-\dfrac{1}{\mathrm{c}^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}$

（b）$\nabla^2\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{\mathrm{c}^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$，$\nabla^2\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{\mathrm{c}^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}$

3. 一圆锥形物体，其轮廓由方程 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ （$1<z<4$）确定，其密度函数是 $\rho(x,y,z)=10-z$，计算它的质量。

4. 请给出使 $\oint_C (y^3-y)\mathrm{d}x-2x^3\mathrm{d}y$ 最大化的正向简单闭曲线 C 的方程。

5. 令 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=x^2yz\vec{\mathrm{i}}+yz^2\vec{\mathrm{j}}+z^3\mathrm{e}^{xy}\vec{\mathrm{k}}$，根据斯托克斯公式计算 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，其中 S 为球体 $x^2+y^2+z^2=5$ 位于平面 $z=1$ 之上的那部分，其朝向为 z 轴的正向。

第十二章 无穷级数

第 32 次

12.1 常数项级数的概念和性质

1．写出下列级数的一般项。

（1）$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\frac{6}{7}-\cdots$

（2）$\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$

2．判断下列级数的收敛性。

（1）$-\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}-\frac{2^3}{3^3}+\cdots+(-1^n)\frac{2^n}{3^n}+\cdots$

（2）$\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}$

3．根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性。

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})$

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$

4．已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{n}$收敛，其部分和为$s_{n}$，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{s_{n}}$发散。

思考：因为$1+2+4+8+\cdots=1+(2+4+8+\cdots)=1+2(1+2+4+8+\cdots)$，

从而设$1+2+4+8+\cdots=-1$

以上结果显然是错的，为什么？

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

第 33 次

12.2　常数项级数的审敛法

1．用比较审敛法判定下列级数的收敛性。

（1）$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

2．用比值审敛法判定下列级数的收敛性。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n\cdot n!}{n^n}$

3．用根值审敛法判定下列级数的收敛性。

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{2n-1})^{2n-3}$

4．判定下列级数是否收敛？如果收敛，是绝对收敛，还是条件收敛？

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{2n^2+1}$

第 34 次

12.3 幂级数

1．求下列幂级数的收敛区间。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^n$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3+2}x^n$

（4） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

2．利用逐项求导或逐项积分，求下列级数的和函数。

（1） $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

（2） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$

第 35 次

12.4　函数展开成幂级数

12.5　函数的幂级数展开式的应用

1．将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间。

（1）$\ln(a+x) \quad (a>0)$

（2）a^x

2．将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数。

3．利用函数的幂级数展开式求下列各式的近似值。

（1）$\ln 3$（误差不超过 0.0001）

（2）$\sqrt[9]{522}$（误差不超过 0.00001）

专业班级__________________　　　　姓名__________________　　　　学号__________________

第 36 次

12.7　傅里叶级数

12.8　一般周期函数的傅里叶级数

1．下列周期函数$f(x)$的周期为 2π，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，如果$f(x)$在（$-\pi$，π）上的表达式如下。

（1） $f(x)=3x^2+1 \quad (-\pi \le x < \pi)$

（2） $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$ （$-\pi \le x < \pi$）

2．将函数 $f(x)=\begin{cases} e^x & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$ 展开成傅里叶级数。

3．对于周期函数 $f(x)=1-x^2 \quad (-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2})$ 给出其在一个周期内的表达式，并展开成傅里叶级数。

专业班级____________________ 姓名____________________ 学号____________________

第十二章　复习与提高

1．写出以下函数的麦克劳林级数，并给出收敛区间和收敛域。

（1） $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$

（2） $f(x)=\ln(2-x)$

（3） $f(x)=10^x$

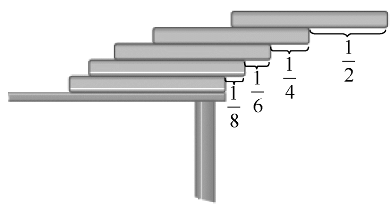
2．利用级数计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$。

3．作用在离开地面高度为 h，质量为 m 的物体上的万有引力 $F=\dfrac{mgR^2}{(R+h)^2}$，其中 R 为地球半径，g 是重力加速度。

（a）将 F 表示为 h/R 的幂级数。

（b）如果我们用级数的第一项近似 F（即 $F\approx mg$，经常用于 h 显著小于 R 的情况），使用 ***Alternating Series Estimation Theorem*** 估计 h 的范围，以使 $F\approx mg$ 的误差率不超过 1%（取 $R=6400$ km）。

4．假设你有很多外形、重量完全相同的书。现在将它们放到桌边，让位于上层的书有一部分处于下层书的外侧。请计算并说明，最上层的书可以完全处于桌面以外。实际上，最上层的书可以延拓到任意位置，只要书堆得足够高。可采用下图的方式进行堆积。（提示：考虑重心位置变化）



专业班级________________　　姓名________________　　学号________________

自测题（一）

一、单项选择题

1．设$\vec{a}=\{1,2,5\}$，$\vec{b}=\{-1,-2,k\}$。若$\vec{a}//\vec{b}$，则$k=$（　　）。

A．0　　B．1

C．-1　　D．-5

2．将双曲线$4x^2-9y^2=36$绕y轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为（　　）。

A．$4x^2-9y^2-9z^2=36$　　B．$4x^2-9y^2+4z^2=36$

C．$4x^2-9y^2-4z^2=36$　　D．$4x^2-9y^2+9z^2=36$

3．函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$**连续**是函数在该点处可微分的（　　）。

A．充分条件　　B．必要条件

C．充分必要条件　　D．非充分非必要条件

4．设$z=\mathrm{e}^{2x+y}$，$y=\sin x$，则$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(0,1)}=$（　　）。

A．0　　B．e　　C．2e　　D．3e

5．设平面区域D由圆周$(x-2)^2+(y-1)^2=2$所围成，若$I_1=\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，则有（　　）。

A．$I_1<I_2$　　B．$I_1=I_2$

C．$I_1>I_2$　　D．不能比较

6．将二次积分$\int_1^3\mathrm{d}x\int_{x-1}^2 f(x,y)\mathrm{d}y$转化成先对$x$后对$y$的二次积分为（　　）。

A．$\int_0^2\mathrm{d}y\int_1^{1+y}f(x,y)\mathrm{d}x$　　B．$\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1+y}^1 f(x,y)\mathrm{d}x$

C．$\int_0^1\mathrm{d}y\int_1^{1+y}f(x,y)\mathrm{d}x$　　D．$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1+y}^1 f(x,y)\mathrm{d}x$

7．通解为$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$的二阶常系数齐次线性微分方程是（　　）。

A．$y''-3y'+2y=0$　　B．$y''+3y'+2y=0$

C．$y''+2y'+y=0$　　D．$y''-2y'+y=0$

8．下列关于级数敛散性说法**错误**的是（　　）。

A．当$|q|\geq 1$时等比级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n\ (a\neq 0)$发散

B．调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散

C．当$p<1$时p级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}(p>0)$发散

D．交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$发散

二、填空题

1．设已知两点$A(1,2,3)$和$B(2,3,4)$，则$\overrightarrow{AB}=$__________，$|\overrightarrow{AB}|=$_________，向量$\overrightarrow{AB}$与y轴的方向余弦$\cos\beta=$______________。

2．设函数$z=\mathrm{e}^x\ln y$的全微分为________________________________。

3．函数$f(x,y,z)=xy^2z$在点$P(1,-1,2)$处的方向导数$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_P$的最大值为____________________________。

4．由二重积分的几何意义知$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=$_____________，其中$D:x^2+y^2\leq 1$。

5．幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$的收敛半径$R=$_________，收敛域为_________，和函数为________________。

三、计算题

1．求函数$z=x^4+y^4-4x^2y^2$的$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2．求曲面$z=x^2+y^2$在点$(1,1,2)$处的切平面及法线方程。

3．计算二重积分 $\iint\limits_{D} x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$， $y=x^2$ 所围成的闭区域。

4．判断交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 是否收敛，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

5．设曲线通过原点，且曲线上任意一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率等于 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$，求该曲线的方程。

6．求微分方程 $y'' - 2y' + y = x$ 的通解。

7．求内接于半径为 $R\,(R > 0)$ 的球且有最大体积的长方体。

8．由变力 $\vec{F} = (6xy^2 - y^3)\vec{\mathrm{i}} + (6x^2y - 3xy^2)\vec{\mathrm{j}}$ 在整个 xoy 面内确定一个力场。

（1）证明质点在整个 xoy 面内移动时场力所做的功与路径无关。

（2）求质点由点 $A(1,0)$ 移动到点 $B(2,1)$ 时场力所做的功。

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

自测题（二）

一、单项选择题

1. 设有直线 $L:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 及平面 $A:3x+y-z+5=0$，则直线 L（　　）。

A. 平行于 A　　B. 在 A 上

C. 垂直于 A　　D. 与 A 斜交

2. 将曲线 $2x^2+3y^2=6$ 绕 y 轴旋转得到的旋转曲面方程为（　　）。

A. $2(x^2+z^2)+3y^2=6$　　B. $2x^2+3(y^2+z^2)=6$

C. $2(x^2-z^2)+3y^2=6$　　D. $2x^2+3(y+z)^2=6$

3. 设 $z=u^2+v^2$，$u=x+y$，$v=x-y$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-1,1)}$ 的值为（　　）。

A. 1　　B. 2

C. –4　　D. 4

4. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，且 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，则函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处（　　）。

A. 必有极值，可能是极大，也可能是极小

B. 可能有极值，也可能无极值

C. 必有极大值

D. 必有极小值

5. 二次积分 $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dy$ 转化成极坐标的二次积分为（　　）。

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

C. $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

D. $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

6. 设 L 为 xoy 平面上的封闭光滑曲线（取正向），它所围成的区域面积为 S，则曲

线积分$\oint_L (x+2y)\mathrm{d}x+(4x-y)\mathrm{d}y$的值为（　　）。

A. S　　B. $2S$

C. $4S$　　D. $-2S$

7. 对于级数$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$，$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$是级数$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$收敛的（　　）。

A. 充分条件　　B. 充要条件

C. 必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R\,(0<R<+\infty)$，则下列说法不正确的是（　　）。

A. $x=R$幂级数可能收敛　　B. $x=-R$幂级数必定发散

C. $|x|<R$时幂级数绝对收敛　　D. $|x|>R$时幂级数发散

9. 设y_1，y_2是二阶常系数线性齐次方程$y''+py'+qy=0$的两个特解，C_1，C_2是两个任意常数，则下列命题中正确的是（　　）。

A. $C_1y_1+C_2y_2$一定是微分方程的通解

B. $C_1y_1+C_2y_2$不是微分方程的解

C. $C_1y_1+C_2y_2$不可能是微分方程的通解

D. $C_1y_1+C_2y_2$是微分方程的解

10. 曲面的方程为$z=x^2+y^2$，则该曲面为（　　）。

A. 锥面　　B. 椭圆抛物面

C. 圆柱面　　D. 球面

二、填空题

1. 已知向量$\vec{a}=(1,2,3)$，$\vec{b}=(2,3,4)$，$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$，则$|c|=$____________。

2. 已知向量$\vec{a}=(3,-1,-2)$，$\vec{b}=(k,1,2)$，若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则$k=$____________。

3. 设函数$u=xy$，则$\mathrm{d}u|_{(1,1)}=$____________。

4. 已知$\mathrm{e}^z+\ln xy+xyz+2=0$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$__________，$\frac{\partial z}{\partial y}=$__________。

5. 微分方程$2xy\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=0$的通解为____________________。

三、解答题

1. 求内接于半径为$R\,(R>0)$的球且有最大体积的长方体。

2. 设平面薄片所占的闭区域 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域，它的面密度为 $u(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$，求这薄片的质量。

3. $\int_L (x^2-y)\mathrm{d}x-(x-\sin^2 y)\mathrm{d}y$ 其中 L 是圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $A(2,0)$ 到点 $O(0,0)$ 之间的一段弧。

4. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是否收敛？如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

5. 设曲线过点 $(1,2)$，且曲线上任意一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率等于 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$，求该曲线的方程。

6．求微分方程 $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 1$ 的特解。

7．求 $\oint_L (2x - y + 4)\mathrm{d}x + (5y + 3x - 6)\mathrm{d}y$，其中 L 为三角形 ABC 的正向边界，顶点坐标如下：$A(0,0)$，$B(3,0)$，$C(3,2)$。

8．设 $f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x \leq 0) \\ 1 + x & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$，将它展开为傅里叶级数。

专业班级__________________ 姓名__________________ 学号__________________

自测题（三）

一、选择题

1．函数 $z=\ln(x^2+y^2-2)+\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的定义域为（　　）。

A．$x^2+y^2\neq 2$　　B．$x^2+y^2\neq 4$

C．$x^2+y^2\geqq 2$　　D．$2<x^2+y^2\leqq 4$

2. 利用变量替换 $u=x$，$v=\dfrac{y}{x}$，一定可以把方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$ 化为新的方程(　　)。

A．$u\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$　　B．$v\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$

C．$u\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$　　D．$v\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$

3. 若 $f(x)=-f(-x)$，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内(　　)。

A．$f'(x)<0, f''(x)<0$

B．$f'(x)<0, f''(x)>0$

C．$f'(x)>0, f''(x)<0$

D．$f'(x)>0, f''(x)>0$

4．设 $f(x)$ 是连续函数，且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}} f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=$（　　）。

A．$-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$

B．$-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

C．$e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$

D．$e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

5. 设 $f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且 $f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)<0$。记 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$，则有（　　）。

A．$S_1<S_2<S_3$　　B．$S_2<S_3<S_1$

C．$S_3<S_1<S_2$　　D．$S_1<S_3<S_2$

6．下列命题中，正确的是（　　）。

A．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的一般项有 $u_n<v_n(n=1,2,\cdots)$，则有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n<\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$

B．若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1(n=1,2,\cdots)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

C．若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

D．若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R(0<R<+\infty)$，则 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$

7．微分方程 $(x+y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ 的通解是（　　）

A．$x+y+\ln(x+y)=c$;

B．$x-y+\ln(x+y)=c$;

C．$x+y-\ln(x+y)=c$;

D．$x-y-\ln(x+y)=c$.

8．二元函数 $z=x^2+xy^3$ 在点（2,1）处的方向导数是（　　）5

A．　　　　　　　　B．

C．　　　　　　　　D．

二、填空题

1．设 $x^2+z^2=y\phi(\frac{z}{y})$，其中 ϕ 可微，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$__________。

2．设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\phi(x+y)$，$f$、$\phi$ 具有二阶连续导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$__________。

3．设 D 由 $y=x^2$，$y=2x^2$，$y=1$，$y=2$ 围成（$x \geq 0$），则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 在直角坐标系下的两种积分次序为______________和______________。

4．设 D 为 $0 \leq y \leq 1-x$，$0 \leq x \leq 1$，则 $\iint_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的极坐标形式的二次积分为________________________。

5．$\int_0^1 x(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots)\mathrm{d}x=$________________________。

6．微分方程 $4y''-20y'+25=0$ 的通解为__________。

三、解答题

1．设 $z=f(2x-y, y\sin x)$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

2．在过点 $P(1,3,6)$ 的所有平面中，求一平面，使之与三个坐标平面所围四面体的体积最小。

3．$\iint\limits_D |x^2+y^2-4|\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为圆域 $x^2+y^2\le 9$。

4．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-4)^n$ 收敛区间及和函数 $S(x)$。

5．设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma \mathrm{e}^x$ 的一个特解为 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x$，试确定 α， β， γ，并求该方程的通解。

6．设 L 为 $x^2+y^2=x$ 从点 $A\left(1,0\right)$ 到 $O(0,0)$ 的上半圆弧，请计算第二类曲线积分 $\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-y+1)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-1)\mathrm{d}y$。

7. 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，请给出点 P 的坐标以及经过该点的切平面和法线方程。

8．设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (0\leq x\leq 1)\\ 1 & (1<x\leq \pi)\end{cases}$，请将它分别展开为正弦级数和余弦级数。

反侵权盗版声明

举报电话：（010）88254396；（010）88258888

传　　真：（010）88254397

E-mail：　dbqq@phei.com.cn

通信地址：北京市万寿路 173 信箱

　　　　　电子工业出版社总编办公室

邮　　编：100036